UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 14.11.2022, Abgabe: 21.11.2022, Übungen: 24.11.2020

Aufgabe 10: Fermis Goldene Regel für periodische Störungen (schriftlich, 5 Punkte)

Verwenden Sie die zeitabhängige Störungstheorie für eine periodische Störung

$$\hat{V}(t) = \hat{F}e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t}\,,$$

die am Zeitpunkt $t = 0$ einsetzt. $\hat{F}$ ist hierbei ein zeitunabhängiger Operator.

a) Betrachten Sie den Übergang zwischen den beiden Zusänden $|n\rangle$ und $|m\rangle$ mit den Energien $E_n = \hbar\omega_n$ und $E_m = \hbar\omega_m$. Vor der Störung befindet sich das System im Zustand $|n\rangle$. Berechnen Sie die Übergangsamplitude $c^{(1)}_{mn}$ in erster Ordnung Störungstheorie in Abhängigkeit von $\hat{F}$ und $\hat{F}^\dagger$.

b) Diskutieren Sie die Übergangsamplitude in der Näherung, wenn $\omega \approx \omega_{mn} = \omega_m - \omega_n$ gilt.

c) Betrachten Sie den Grenzfall $t \to \infty$ und berechnen Sie die Übergangsrate $W_{mn} = \frac{d}{dt}|c^{(1)}_{mn}(t)|^2$.

Aufgabe 11: WKB-Methode (nach Wentzel, Kramers und Brillouin) (schriftlich, 5 Punkte)

Suchen Sie die allgemeine Lösung der eindimensionalen stationären Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m mit Energie E in einem Potenzial $V(x) < E$ mit dem Ansatz $\psi(x) = \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}W(x)}$, wobei Sie die Funktion $W(x)$ formell als eine Potenzreihe in $\hbar$ darstellen (WKB-Ansatz)

$$W(x) = W_0(x) + \frac{\hbar}{i}W_1(x) + \left(\frac{\hbar}{i}\right)^2 W_2(x) + \ldots$$

Berücksichtigen Sie nur die Terme nullter und erster Ordnung in $\hbar$, lösen Sie die entsprechenden Differentialgleichungen und finden Sie in dieser Näherung die Wellenfunktion $\psi(x)$. Wie sieht die Lösung im Bereich mit $V(x) > E$ aus?

Aufgabe 12: Greensche Funktion der stationären Schrödingergleichung (mündlich)

a) Bringen Sie die stationäre Schrödingergleichung auf die Form

$$\left(\Delta + k^2\right) \psi(\mathbf{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}). \tag{1}$$

b) Bestimmen Sie die Greensche Funktion $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, definiert durch

$$\left(\Delta + k^2\right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

zur Lösung der inhomogenen Differenzialgleichung (1).

Hinweise :

- Finden Sie zuerst eine Darstellung der Fourier-transformierten Greenschen Funktion $G(\mathbf{q})$.
- Verwenden Sie $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ als Polarachse und bringen Sie $G(\mathbf{R})$ auf die Form

$$G(\mathbf{R}) = \frac{i}{8\pi^2 R} \left(D_+ + D_-\right) \, ,$$

mit

$$D_\pm = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iqR}}{q \pm k} dq \, .$$

- Betrachten Sie zuerst $k' = k \pm i\epsilon$ ($\epsilon > 0$) anstatt k, benutzen Sie dann den Residuensatz (im Zusammenhang mit dem Lemma von Jordan), um $D_\pm$ zu bestimmen, und lassen Sie anschließend ϵ gegen Null streben.