



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
 Sommersemester 2023 - Übungsblatt 8**

Ausgabe: 14.06.2023, Abgabe: 21.06.2023, Übungen: 23.06.2023

Aufgabe 21: Drehimpulsalgebra

(mündlich)

a) (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)^T = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

bzw. $\hat{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$ mit den bekannten Kommutatorrelationen der Orts- und Impulskomponenten:

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_j], [\hat{L}_i, \hat{p}_j], [\hat{L}_i, \hat{L}_j],$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i], [\hat{L}_i, \hat{r}^2], [\hat{L}_i, \hat{p}^2].$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie außerdem mit den Leiteroperatoren $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, dass:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{L}_{\pm},$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0,$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z,$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z.$$

Aufgabe 22: Eigenzustände von \hat{L}^2 und \hat{L}_x

(schriftlich - 6 Punkte)

Als "Drehimpulsstandardbasis" bezeichnet man die orthonormierte Basis $\{|l, m\rangle\}$ der simultanen Eigenzustände von \hat{L}^2 und \hat{L}_z . In dieser Aufgabe sollen Sie für den Drehimpuls $l = 1$ die Eigenzustände $|1, \mu\rangle$ von \hat{L}_x , welche $\hat{L}_x |1, \mu\rangle = \hbar \mu |1, \mu\rangle$ mit $\mu = 0, \pm 1$ erfüllen, durch die Eigenzustände $|1, m\rangle$ von \hat{L}_z ausdrücken.

- (1 Punkt) Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ die Elemente der Matrix $\langle 1, m' | \hat{L}_x | 1, m \rangle$.
 Hinweis: $\hat{L}_{\pm} |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$.
- (2 Punkte) Entwickeln Sie $|1, \mu\rangle$ in der Basis $\{|1, m\rangle\}$ und geben Sie mit der Matrix aus (a) die Entwicklungskoeffizienten an.
- (2 Punkte) Berechnen Sie für die Eigenwerte von \hat{L}_x mit $\mu = 0, \pm 1$ die dazugehörigen normierten Eigenzustände $|1, \mu\rangle$.
- (1 Punkt) Einer der möglichen Eigenwerte ist $\mu = 0$. Geben Sie den Erwartungswert von \hat{L}_z sowie die möglichen individuellen Messwerte von \hat{L}_z in diesem Zustand an.

Aufgabe 23: Unschärferelation für \hat{L}_x, \hat{L}_y **(mündlich)**

Verifizieren Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta O_1 \Delta O_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{O}_1, \hat{O}_2] \rangle|$$

explizit für $\hat{O}_1 = \hat{L}_x, \hat{O}_2 = \hat{L}_y$ und für die allgemeine Eigenfunktion von \hat{L}^2 und \hat{L}_z mit Quantenzahlen l und m . Drücken Sie dazu $\hat{L}_{x/y}$ durch Leiteroperatoren aus und benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Wirkung auf Drehimpulseigenzustände. Für welche m gilt bei gegebenem l Gleichheit in der Unschärferelation?

Aufgabe 24: Kugelflächenfunktionen**(mündlich)**

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta')$$

und der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta Y_{l',m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'},$$

dass sich jede Funktion f nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt, d.h.

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

c) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von L^2 und L_z alle zueinander orthonormal sind:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin \vartheta.$$

d) Verwenden Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben das Computer-Algebra-System MATHEMATICA™ z. B. im PC-Pool der Physik.

- i) Zeigen Sie die Normierung der in a) angegebenen Kugelflächenfunktionen, indem Sie die entsprechenden Integrale berechnen lassen.
- ii) Stellen sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$ und alle möglichen m graphisch dar.
Hinweis: Verwenden Sie die Funktion SphericalPlot3D. In MATHEMATICA sind die Kugelflächenfunktionen verfügbar als SphericalHarmonicY[l, m, θ , ϕ].
- iii) Stellen Sie auch das Betragsquadrat der folgenden Kombinationen von Kugelflächenfunktionen dar und vergleichen Sie mit ii)

$$Y_{11} + Y_{1-1}, Y_{11} - Y_{1-1}, \\ Y_{21} + Y_{2-1}, Y_{21} - Y_{2-1}, Y_{22} + Y_{2-2}, Y_{22} - Y_{2-2}.$$