UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

**Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik**
**Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 10**
Ausgabe: 16.01.2023, Abgabe: 23.01.2023, Übungen: 26.01.2023

## Aufgabe 32: Bogoliubov-Transformation (schriftlich, 6 Punkte)

Der Hamilton-Operator

$$H = \sum_{\mathbf{k}\neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{N}{V} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} V_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} + \frac{N^2}{2V} V_0 + \frac{N}{2V} \sum_{\mathbf{k}\neq 0} V_{\mathbf{k}} (\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{a}^\dagger_{-\mathbf{k}} + \hat{a}_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}})$$

beschreibt näherungsweise $N$ wechselwirkende Bosonen im Volumen $V$ mit den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren $\hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}}$ und $\hat{a}_{\mathbf{k}}$. $H$ soll nun mittels der Bogoliubov-Transformation

$$\hat{a}_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}^\dagger_{-\mathbf{k}}, \qquad \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}^\dagger_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{\alpha}_{-\mathbf{k}}$$

mit Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}, v_{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}$ diagonalisiert werden. Verwenden Sie dabei die Annahme, dass $u_{-\mathbf{k}} = u_{\mathbf{k}}$, $v_{-\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}$ gilt.

a) Ermitteln Sie eine Gleichung für $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$ aus der Forderung, dass auch $\hat{\alpha}^\dagger_{\mathbf{k}}$ und $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ bosonische Vertauschungsrelationen erfüllen sollen.

b) Drücken Sie nun $H$ durch die Operatoren $\hat{\alpha}^\dagger_{\mathbf{k}}$ und $\hat{\alpha}_{\mathbf{k}}$ aus.

c) Der Hamilton-Operator ist diagonal, wenn die Terme, die Produkte von Operatoren mit unterschiedlichen Indizes enthalten, verschwinden. Berechnen Sie mit der daraus folgenden Bedingung und dem Ergebnis aus a) $u_{\mathbf{k}}$ und $v_{\mathbf{k}}$. Führen Sie dabei die Abkürzung

$$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m}\right)^2 + \frac{N \hbar^2 k^2 V_{\mathbf{k}}}{Vm}}$$

ein. Notieren Sie den diagonalen Hamilton-Operator. Was bedeuten die einzelnen Terme?

## Aufgabe 33: Kohärente Zustände (schriftlich, 4 Punkte)

Betrachten Sie ein bosonisches System mit N Freiheitsgraden.

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\phi\rangle = e^{\sum_{i=1}^{N} \phi_i \hat{a}_i^\dagger} |0\rangle$$

ein Eigenzustand des Vernichtungsoperators $\hat{a}_j|\phi\rangle = \phi_j|\phi\rangle$ mit dem Eigenwert $\phi_j$ ist.

b) Ein adjungierter Zustand ist damit gegeben durch

$$\langle\psi| = \langle 0| e^{\sum_{j=1}^{N} \psi_j^* \hat{a}_j}.$$

Bestimmen Sie den Überlapp $\langle\psi|\phi\rangle$ zweier kohärenter Zustände.

c) *Holomorphe Darstellung* : Zeigen Sie, dass die Wirkung der Leiteroperatoren gegeben ist durch

$$\langle\phi|\hat{a}_j|\chi\rangle = \frac{\partial}{\partial\phi_j^*}\langle\phi|\chi\rangle, \quad \langle\phi|\hat{a}_j^\dagger|\chi\rangle = \phi_j^*\langle\phi|\chi\rangle.$$

Welche Vertauschungsrelation erfüllen $\frac{\partial}{\partial\phi_j^*}$ und $\phi_j^*$?