



## Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik

### Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 6

Ausgabe: 05.12.2022, Abgabe: 12.12.2022, Übungen: 15.12.2022

## Aufgabe 19: Fermionische Teilchendarstellung von Operatoren (schriftlich, 3 Punkte)

Sei  $O$  ein Einteilchenoperator. Wir definieren den entsprechenden Einteilchenoperator, der auf dem Vielteilchen-Hilbertraum wirkt, als  $\mathcal{O} = F(O) = \sum_{s,r} O_{rs} a_r^\dagger a_s$  mit  $O_{rs} = \langle r|O|s\rangle$ . Wir möchten zeigen, dass die Teilchendarstellung der Spinoperatoren

$$\mathcal{S}_k = \frac{\hbar}{2} F(\sigma^k) = \frac{\hbar}{2} \sum_{s,r} \sigma_{rs}^k a_r^\dagger a_s$$

die Drehimpulsalgebra erfüllt. Hier sind  $\sigma^k$  die Pauli-Matrizen und  $k \in \{x, y, z\}$ ;  $a_r^\dagger$  und  $a_s$  erfüllen die fermionischen Vertauschungsrelationen.

a) Als Vorbereitung leiten Sie zuerst die folgende Relation her:

$$[X, YZ] = \{X, Y\}Z - Y\{X, Z\} = \{Y, X\}Z - Y\{Z, X\}.$$

b) Benutzen Sie  $[X, YZ] = [X, Y]Z + Y[X, Z]$  und dann das Ergebnis von (a), um die folgende Gleichung herzuleiten:

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = [F(A), F(B)] = F([A, B]).$$

c) Zeigen Sie dann mit Hilfe von (b), dass

$$[\mathcal{S}_k, \mathcal{S}_l] = i\hbar \varepsilon_{klm} \mathcal{S}_m.$$

## Aufgabe 20: Kohärente Zustände von Fermionen (mündlich)

Betrachten Sie ein fermionisches System mit einem Freiheitsgrad. Um hier einen kohärenten Zustand zu konstruieren, benötigen wir die sogenannten *Grassmann-Variablen*. Dies sind Zahlen, die mit sich selbst und allen fermionischen Operatoren antikommutieren, d.h.

$$\{\xi, \xi\} = \{\xi, c\} = \{\xi, c^\dagger\} = 0.$$

a) Überprüfen Sie, dass der Zustand  $|\eta\rangle = e^{-\eta c^\dagger} |0\rangle$  **kein Eigenzustand** des Vernichtungsoperators  $c$  ist, falls  $\eta$  eine komplexe Zahl ist.

b) Überlegen Sie sich, warum jede analytische Funktion von Grassmann-Variablen linear ist, d.h.  $f(\xi) = f_0 + f_1 \xi$ .

c) Zeigen Sie damit, dass, wenn  $\xi$  eine Grassmann-Variable ist,  $|\xi\rangle = e^{-\xi c^\dagger} |0\rangle$  ein kohärenter Zustand ist, d.h.  $c|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle$ .

## Aufgabe 21: Heisenberg-Ferromagnet (schriftlich, 7+2 Punkte)

Wir betrachten ein  $n$ -Spin-System (Spin  $S$ ) mit dem Hamilton-Operator

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j, \quad J > 0,$$

wobei  $\langle i, j \rangle$  bedeutet, dass nur über nächste Nachbarn summiert wird. Jeder Spin hat  $p$  nächste Nachbarn.

- 1) Welcher Zustand ist der Grundzustand  $|G\rangle$  von  $H$ ?
  - a) Zeigen Sie, dass  $|G_0\rangle = |S, S, \dots, S\rangle$  ein Eigenzustand ist. Berechnen Sie die Energie dieses Zustands.
  - b) Zeigen Sie, dass  $|S, S, \dots, S\rangle$  die kleinstmögliche Energie hat. (Hinweis: Es genügt,  $\langle \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \rangle \leq S^2$  zu zeigen. Warum?)
  - c) Zeigen Sie, dass  $H$  mit  $S_{\text{tot}}^- = \sum_i S_i^-$  kommutiert. Was bedeutet das für die Zustände  $(S_{\text{tot}}^-)^l |S, S, \dots, S\rangle$  mit  $l = 1, 2, \dots, 2Sn$  ?
  - d) Wie sieht der Grundzustand aus? (Beschreiben Sie in Worten).
  
- 2) Wir suchen jetzt die niedrigsten Anregungen und betrachten den Zustand  $|i\rangle = |S \dots \underbrace{S-1}_i \dots S\rangle$ .
  - a) Wie kann man  $|i\rangle$  von  $|G_0\rangle$  erhalten? (Hinweis: Wie wirkt  $S_i^-$  auf  $|G_0\rangle$ ?)
  - b) Berechnen Sie  $H^z|i\rangle$ , wobei  $H^z = -J \sum_{\langle k,l \rangle} S_k^z S_l^z$ . Ist  $|i\rangle$  ein Eigenzustand von  $H^z$ ?
  - c) Berechnen Sie  $H^\perp|i\rangle$ . Hier  $H^\perp = -J \sum_{\langle k,l \rangle} (S_k^x S_l^x + S_k^y S_l^y)$ . Ist  $|i\rangle$  ein Eigenzustand von  $H^\perp$ ?
  - d) Betrachten Sie die *Bloch-Zustände*  $|\mathbf{k}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_i e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} |i\rangle$ , welche lineare Superpositionen von  $|i\rangle := |\mathbf{r}_i\rangle$  darstellen die der Translationssymmetrie genügen. Benutzen Sie diese Zustände, um  $H^\perp$  zu diagonalisieren. (Hinweis: Die Summe über die nächsten Nachbarn vom  $i$ . Spin  $\sum_{j(i)} |\mathbf{r}_j\rangle$  lässt sich als  $\sum_{\boldsymbol{\tau}} |\mathbf{r}_i + \boldsymbol{\tau}\rangle$  schreiben, wobei der Satz von Translationsvektoren  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i$  für jedes  $i$  gleich ist).
  - e) Welche Energie hat dann der Zustand  $|\mathbf{k}\rangle$ ?
  
- 3\*) Wir suchen jetzt weitere Anregungen des Systems. Leider ist der Zustand  $|\mathbf{k}, \mathbf{k}'\rangle = \frac{1}{n} \sum_{i,j} e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i + \mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}_j)} S_i^- S_j^- |G_0\rangle$  kein Eigenzustand von  $H$ . Wir brauchen eine andere Methode, um die Anregungsenergien zu bestimmen.
  - a) Schreiben Sie  $H$  mit Hilfe der Holstein-Primakoff-Transformation um (vgl. Aufgabe 17). (Hinweis: Benutzen Sie die folgenden Näherungen  $S_i^+ = \sqrt{2S}a_i$  und  $S_i^- = \sqrt{2S}a_i^\dagger$  und berücksichtigen Sie nur Terme der zwei höchsten Ordnungen in  $S$ .)
  - b) Benutzen Sie  $a_i^\dagger = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} a_{\mathbf{k}}^\dagger$  und  $a_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}_i} a_{\mathbf{k}}$ , um  $H$  durch  $a_{\mathbf{k}}^\dagger$  und  $a_{\mathbf{k}}$  darzustellen.