UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 03.05.2023, Abgabe: 10.05.2023, Übungen: 12.05.2023

Aufgabe 6: Das Gauß'sche Wellenpaket (schriftlich - 12 Punkte)

Gegeben sei eine Gaußverteilung der Wellenzahlen k in einer Dimension:

$$a(k) = Ce^{-ikx_0}e^{-\frac{(k-k_0)^2}{4\sigma^2}} \qquad (\sigma > 0).$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Normierungskonstante $C \in \mathbb{R}$, so dass $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |a(k)|^2 \, \mathrm{d}k = 1$ gilt.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie das zugehörige Wellenpaket im Ortsraum durch Fourier-Rücktransformation

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} a(k)e^{i(kx-\omega t)} \, \mathrm{d}k$$

und der Dispersionsrelation $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Hinweis: Es ergibt sich

$$\psi(x,t) = \frac{C}{\sqrt{4\pi b(t)}}e^{ik_0 c(t)}e^{-\frac{(x-r(t))^2}{4b(t)}}$$

mit $b(t) = \frac{1}{4\sigma^2} + \frac{i\hbar}{2m}t, r(t) = x_0 + \frac{\hbar k_0}{m}t$ und $c(t) = x - x_0 - \frac{\hbar k_0}{2m}t$.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie $|\psi(x,t)|^2$ und zeigen Sie, dass das Maximum des Wellenpaketes am Ort $x_0 + v_g t$ liegt. $v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\Big|_{k_0}$ ist hierbei die Gruppengeschwindigkeit. Betrachten Sie auch die Breite des Wellenpaketes und beschreiben Sie das *Zerfließen des Wellenpaketes*.

d) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x$ unabhängig von der Zeit ist. Was bedeutet das?

e) (2 Punkte) Berechnen Sie den *Erwartungswert*

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x,t)^* x \psi(x,t) \, \mathrm{d}x$$

des Ortes x im Zustand $\psi(x,t)$ sowie $\langle x^2 \rangle$.

f) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass für die Varianz (Unschärfe) einer beliebigen Funktion $A(x)$ gilt:

$$(\Delta A)^2 := \left\langle (A - \langle A \rangle)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2 .$$

g) (2 Punkte) Berechnen Sie damit die Ortsunschärfe Δx und die Impulsunschärfe Δp wobei für den Impuls gilt $p = -i\hbar\partial_x$.

h) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die *Heisenbergsche Unschärferelation* $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$ erfüllt ist. Wann gilt das Gleichheitszeichen?

Aufgabe 7: Diffusion und Gauß'sches Wellenpaket

Die (eindimensionale) Diffusionsgleichung (Wärmeleitungsgleichung)

$$\partial_t \phi(x,t) = D\partial_x^2 \phi(x,t)$$

beschreibt die Ausbreitung einer beliebigen Funktion $\phi(x,t)$ (z.B. Temperatur) mit der Zeit aufgrund von Zufallsprozessen wie z.B. Streuereignissen.

a) Lösen Sie die Diffusionsgleichung für eine (normierte) Gaussverteilung mit einer zeitabhängigen Breite

$$\phi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s(t)} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2s(t)^2}} \quad (s(t) > 0)$$

und finden Sie $s(t)$.

Hinweis: Für die zeitabhängiger Breite ergibt sich der Ausdruck

$$s(t) = \frac{D}{s'(t)}.$$

Lösen Sie diese Differentialgleichung mit einem geeigneten Ansatz.

b) Diskutieren und vergleichen Sie das Ergebnis mit der zeitabhängigen Breite der Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ des Gauss'schen Wellenpaketes aus Aufgabe 6.

Aufgabe 8: Parseval Gleichung

Betrachten Sie zwei periodische Funktionen $f(x)$ und $g(x) \in L^2$ mit der Periode L, also $f(x+L) = f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$ und analog für $g(x)$.

a) Drücken Sie $f(x)$ und $g(x)$ als komplexe Fourierreihen mit den Koeffizienten α_n und β_n aus. Nutzen Sie diese Darstellungen, um die folgende Gleichung nachzuweisen

$$\frac{1}{L}\int_c^{c+L} \mathrm{d}x f(x) g^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n \beta_n^*.$$

Leiten Sie damit die *Parsevalsche Gleichung* für komplexe und reelle Funktionen ab:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L}\int_c^{c+L} \mathrm{d}x |f(x)|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\alpha_n|^2 && \text{(für komplexe Funktionen)} \\ &= \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) && \text{(für reelle Funktionen).} \end{aligned}$$

a_n und b_n sind die Koeffizienten der reellen Fourierreihe.

b) Finden Sie die Koeffizienten der Fourierreihe für die Funktion $f(x) = x^2$ in dem Intervall $-2 < x \leq 2$:

$$a_0 = \frac{8}{3}, a_n = 16\frac{(-1)^n}{\pi^2 n^2}.$$

Hinweis: Beachten Sie die Symmetrie der Funktion $f(x)$.

c) Zeigen Sie mit Hilfe der Parseval Gleichung und dem Ergebnis aus Teilaufgabe b), dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

d) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition der (kontinuierlichen) Fouriertransformation das *Parseval-Theorem* (Satz von Plancherel) und damit die Isometrie der Fouriertransformation für eine Funktion $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi$$

und stellen Sie durch Verwendung des Kontinuumlimits den Zusammenhang mit der Parsevalschen Gleichung her.