



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)  
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 10**

Ausgabe: 28.06.2023, Abgabe: 05.07.2023, Übungen: 07.07.2023

**Aufgabe 28: Der Vektorraum  $L^2$**

**(mündlich)**

- a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ( $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\mathbf{r})|^2 d\mathbf{r} < \infty$ ) einen Vektorraum (genannt  $L^2(\mathbb{R}^3)$ ) bilden.
- b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle \psi | \phi \rangle = \int \psi^*(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) d\mathbf{r},$$

für alle Elemente von  $L^2(\mathbb{R}^3)$  existiert.

*Hinweis:* Zeigen und verwenden Sie  $|\phi(\mathbf{r})|^2 + |\psi(\mathbf{r})|^2 \geq 2|\phi(\mathbf{r})||\psi(\mathbf{r})|$ .

**Aufgabe 29: Lineare Algebra**

**(schriftlich - 8 Punkte)**

- a) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren  $\phi$  und  $\psi$  eines Hilbertraumes die
- a) Schwarzsche Ungleichung :  $|\langle \phi | \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|$
- b) Dreiecksungleichung :  $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$

Die Norm  $\|\cdot\|$  ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d. h. z. B.  $\|\phi\| = \sqrt{\langle \phi | \phi \rangle}$ .

- b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.
- c) (2 Punkte) Bei gegebener Orthonormalbasis  $|\psi_n\rangle$  (mit  $n = 1, \dots, N$ ,  $N$ -Dimension des Hilbertraumes) lässt sich ein linearer Operator  $A$  als Matrix darstellen, durch

$$(A_{ij}) = \langle \psi_i | A | \psi_j \rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Spur (=Summe der Diagonalelemente) der Matrixdarstellung von linearen Operatoren (in einem Hilbert-Raum mit abzählbarer Orthonormalbasis) unabhängig von der gewählten Basis ist.

- d) (2 Punkte) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator  $[A, B] := AB - BA$  zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.

Wenn  $A$  und  $B$  hermitesch sind, wann ist das Produkt  $AB$  auch hermitesch? Folgt aus  $[A, B] = 0$  und  $[B, C] = 0$  auch  $[A, C] = 0$ ?

### Aufgabe 30: Gram-Schmidt-Orthonormierung

(mündlich)

Betrachten Sie den Hilbert-Raum  $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$  mit dem Skalarprodukt  $\langle f|g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ .

- a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome  $(1, x, x^2, x^3, \dots)$  die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.

*Hinweis:* Die orthogonalen Polynome  $p_n(x)$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  ergeben sich im Gram-Schmidt-Verfahren rekursiv aus den gegebenen Polynomen  $f_n(x)$  durch

$$p_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle p_i|f_n \rangle}{\langle p_i|p_i \rangle} p_i(x).$$

- b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen  $P_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) mit der Normierung

$$\langle P_n|P_m \rangle = \int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x) dx = \frac{2}{2n+1} \delta_{nm}.$$

Normieren Sie die Polynome aus a) um die  $P_n(x)$  (für  $n = 0, 1, 2$ ) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt. Vergleichen Sie zur Kontrolle mit den in der Vorlesung verwendeten Legendre-Polynomen.

- c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der  $n$ -ten Ordnung, d.h.  $f_0(x) = a_0$ ,  $f_1(x) = a_1x + b_1$ ,  $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ , die Polynome  $P_n(x)$  (für  $n = 0, 1, 2$ ) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.