UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 12
Ausgabe: 12.07.2023, Abgabe: 19.07.2023, Übungen: 21.07.2023

Aufgabe 34: Störungstheorie für ein Zwei-Niveau-System (mündlich)

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H}_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 \end{pmatrix}$$

und einer Störung

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & r \\ r & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2\Delta$ und $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$.

a) Berechnen Sie die Korrektur erster Ordnung der Eigenfunktionen und die Korrektur zweiter Ordnung des Energiespektrums für den Fall $\Delta \gg r$.

b) Bestimmen Sie die Korrektur des Eigenwerts in erster Ordnung und die richtigen Funktionen nullter Ordnung für den Fall $\Delta = 0$. Beachten Sie, dass das Energieniveau in diesem Fall zweifach entartet ist!

c) Skizzieren Sie das Energiespektrum als Funktion von Δ (Δ kann auch negativ sein.). Verwenden Sie die Ergebnisse aus (a) und (b) und diskutieren Sie die Δ-Abhängigkeit des Energiespektrums.

Aufgabe 35: Der Harmonische Oszillator I (schriftlich - 8 Punkte)

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände $|n\rangle$, mit $n = 0, 1, 2, ...$, des Hamiltonoperators $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$ zu den Eigenwerten $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, sollen die Matrixdarstellungen wichtiger Operatoren bestimmt werden.

a) (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$ mit den Orts- und Impuls-Operatoren $\hat{x}$ und $\hat{p}$.

b) (3 Punkte) Berechnen Sie $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$ und $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$ und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$ diagonal ist.

c) (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:

i) Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass Spur$([A, B]) = 0$ gilt, wobei Spur$(A) = \sum_i A_{ii}$.

ii) Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator $[\hat{x}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ in Matrixdarstellung müsste nach Punkt i) in naiver Betrachtung $\hbar = 0$ folgen. Berechnen Sie $\hat{x}\hat{p}$ und $\hat{p}\hat{x}$ mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung $\hbar = 0$ nicht gilt.

Aufgabe 36: Der Harmonische Oszillator II (mündlich)

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\alpha\rangle := |\psi_\alpha\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = C e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante $\alpha = |\alpha| e^{\mathrm{i}\delta}$ gebildet werden können. Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

a) Zeigen Sie, dass $|\alpha\rangle$ Eigenfunktion zum Absteigeoperator a ist. Zeigen Sie, dass $a^\dagger$ keine Eigenzustände besitzt.

b) Welches $C > 0$ normiert $|\alpha\rangle$ auf 1?

   Mit diesem C kann $|\alpha\rangle$ geschrieben werden als $|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt $p_n = |c_n|^2$? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl $\langle \hat{n} \rangle = \langle \alpha | a^\dagger a | \alpha \rangle$ aus. Berechnen Sie auch die Varianz $(\Delta n)^2$ der Teilchenzahl.

c) Wie lautet der zeitabhängige Zustand $|\alpha(t)\rangle$, wenn $|\alpha(t = 0)\rangle = |\alpha\rangle$?
   Hinweis: Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie $|\alpha(t)\rangle$ auf die Form $|\alpha(t)\rangle = e^{-\mathrm{i}\omega t/2} |\psi_{\alpha(t)}\rangle$.

d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x \rangle(t) = \langle \alpha(t) | \hat{x} | \alpha(t) \rangle.$$

   Hinweis: Bringen Sie das Ergebnis auf die Form $\langle x \rangle(t) = 2\lambda |\alpha| \cos(\omega t - \delta)$.

e) Berechnen Sie die Unschärfe $(\Delta x)^2(t) = \langle \alpha(t) | (\hat{x} - \langle x \rangle(t))^2 | \alpha(t) \rangle$ und (das analog definierte) $(\Delta p)^2(t)$ z. B. durch Ausnutzung von $\langle p \rangle = m \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle x \rangle$ (Ehrenfest-Theorem).

   Zeigen Sie damit, dass $|\alpha\rangle$ ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d. h.

$$\Delta x(t) \Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$