UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 26.04.2023, Abgabe: 03.05.2023, Übungen: 05.05.2023

Aufgabe 4: Plancksche Strahlungsformel (schriftlich - 8 Punkte)

Das Rayleigh-Jeans-Gesetz führt zu einem unphysikalischen Ergebnis für große Frequenzen (*UV-Katastrophe*). Um dieses Problem zu lösen, führte Planck im Jahre 1900 die Quantenhypothese ein. Hierbei nahm er an, dass ein Oszillator der Frequenz ν nur ganzzahlige Vielfache der Energie $h\nu$ aufnehmen kann. Damit ergab sich das *Plancksche Strahlungsgesetz* (siehe Vorlesung) zu

$$u(\nu,T) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/k_\mathrm{B}T}-1}.$$

a) (2 Punkte) Leiten Sie die Grenzfälle für $h\nu \ll k_\mathrm{B}T$ (Rayleigh-Jeans) und $h\nu \gg k_\mathrm{B}T$ (Wiensches Gesetz) aus dem Plancksche Strahlungsgesetz her und skizzieren Sie beide Grenzfälle.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die gesamte Strahlungsleistung S pro Fläche durch Integration der Strahlungsflussdichte

$$P(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega = \frac{c}{4\pi}u(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu\mathrm{d}\Omega$$

über das gesamte Frequenzspektrum und den Halbraum (Achtung: Die Abstrahlung ist winkelabhängig nach Lambert) und bestimmen Sie aus dem *Stefan-Boltzmann-Gesetz* $S = \sigma T^4$ die Stefan-Boltzmann-Konstante σ.
Hinweis:

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi^4}{15}.$$

c) (1 Punkt) Berechnen Sie aus dem Planckschen Strahlungsgesetz die spektrale Energiedichte $\tilde{u}$ in Abhängigkeit der Wellenlänge λ mittels der Transformation $\int u(\nu,T)\,\mathrm{d}\nu = \int \tilde{u}(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda$.

d) (1 Punkt) Wilhelm Wien leitete bereits 1893 allein aus der (begründeten) Annahme

$$u(\nu,T) \sim \nu^3 F(\frac{\nu}{T})$$

mit einer unbekannten Funktion F das *Wiensche Verschiebungsgesetz* her. Überlegen Sie sich, wie man unter dieser Annahme zeigen kann, dass das Maximum von $u(\nu,T)$ proportial zur Temperatur T ist, d.h. $\nu_\mathrm{max} \sim T$.

e) (2 Punkte) Bestimmen Sie jeweils das Maximum von $u(\nu,T)$ und $\tilde{u}(\lambda,T)$ (*Wiensches Verschiebungsgesetz*) und zeigen Sie, dass $\nu_\mathrm{max}\lambda_\mathrm{max} \neq c$ ist. Wie lässt sich das verstehen?
Hinweis: Die Maxima lassen sich nicht analytisch bestimmen.

Aufgabe 5: Wärmekapazität von Festkörpern

In Analogie zur Herleitung des Planckschen Strahlungsgesetz aus den quantisierten Moden eines Hohlraumes (Photonen) lässt sich die Wärmekapazität eines Festkörpers aus den quantisierten Schwingungsmoden eines Gitters (Phononen) bestimmen.
Die (volumen-)spezifische Wärmekapazität $c_V = \frac{\partial u}{\partial T}$ bestimmt sich aus der inneren Energiedichte

$$u = \int_0^\infty \langle n(\nu)\rangle d(\nu) h\nu \,\mathrm{d}\nu$$

mit $\langle n(\nu)\rangle$ der Verteilung der Phononen über die Frequenzen, $d(\nu)$ der Zustandsdichte pro Volumen und $h\nu$ der Energie eines Phonons.

a) Im *Einstein-Modell* nimmt man an, dass nur Schwingungen einer Frequenz auftreten (Zustandsdichte $\sim$ δ-Funktion). Die Gesamtzahl der Atome sei N, wobei jeweils 3 Freiheitsgrade (Schwingungsrichtungen) auftreten mit der für Photonen und Phononen geltenden Bose-Einstein-Verteilung

$$\langle n(\nu)\rangle = \frac{1}{\exp(\frac{h\nu}{k_\mathrm{B}T}) - 1}.$$

Berechnen Sie die Energiedichte u im Einstein-Modell und bestimmen Sie die spezifische Wärmekapazität c_V für die Grenzfälle $h\nu \ll k_\mathrm{B}T$ und $h\nu \gg k_\mathrm{B}T$.

b) Das *Debye-Modell* nimmt eine physikalisch sinnvollere Zustandsdichte an.
Betrachten Sie dazu ein würfelförmiges Volumen der Kantenlänge L mit reflektierenden Innenwänden. Welche Bedingung müssen die Wellenvektoren k von stehenden Schwingungen darin erfüllen?

c) Die erlaubten Wellenvektoren liegen damit also auf einem Punktgitter in dreidimensionalen k-Raum. Bestimmen Sie die Gesamtzahl M von Schwingungsmoden für einen Freiheitsgrad mit der Dispersionsrelation $\omega = 2\pi\nu = c_\mathrm{s}k$ (sog. akustische Phononen) indem Sie das Verhältnis zwischen dem gesamten Volumen in k-Raum (Kugeloktant, da Gesamtanzahl $\gg 1$ und nur postive k-Werte) zu dem Volumen bilden, dass einem k-Wert zugeordnet ist. Bestimmen Sie damit die Zustanddichte (pro Freiheitsgrad) zu

$$d(\nu) = \frac{1}{V}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}\nu} = \frac{4\pi\nu^2}{c_\mathrm{s}^3}.$$

d) Bestimmen Sie aus der Normierung der Zustandsdichte ($\int_0^{\nu_\mathrm{D}} d(\nu)\mathrm{d}\nu = N/V$) die *Debye-Frequenz* ν_D als maximale Frequenz der Phononen.

e) Berechnen Sie analog zum Einstein-Modell die Energiedichte u. Nehmen Sie dafür an, dass für alle Freiheitsgrade die gleiche Dispersionsrelation gilt.

Hinweis: Das Integral lässt sich nicht analytisch lösen und muss auch nicht berechnet werden. Schreiben Sie das Ergebnis mit der *Debye-Temperatur* $T_\mathrm{D} = h\nu_\mathrm{D}/k_\mathrm{B}$.

f) Werten Sie die Energiedichte für den Grenzfall $\nu_\mathrm{D} \to \infty$ aus und vergleichen Sie das Ergebnis mit dem Stefan-Boltzmann-Gesetz für Photonen.

g) Bestimmen Sie c_V für die Grenzfälle $T \ll T_\mathrm{D}$ und $T \gg T_\mathrm{D}$ explizit und zeigen Sie damit, dass $c_V \sim T^3$ (für $T \ll T_\mathrm{D}$) und $c_V = 3k_\mathrm{B}N/V$ (für $T \gg T_\mathrm{D}$: Äquipartitionstheorem, Dulong-Petit) gilt.