UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
http://tinyurl.com/2023ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2023 - Übungsblatt 5
Ausgabe: 17.05.2023, Abgabe: 24.05.2023, Übungen: 26.05.2023

Aufgabe 12: Operator-Gymnastik **(schriftlich - 8 Punkte)**

a) (2 Punkte) Zeigen Sie folgende Kommutatorrelationen für beliebige Operatoren A, B und C bzw. beliebige Funktionen $f(x)$ und $g(p)$:

i) $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$,

ii) $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$ (Jacobi-Identität),

iii) $[p, f] = -i\hbar \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$,

iv) $[x, g] = i\hbar \frac{\mathrm{d}g(p)}{\mathrm{d}p}$.

b) (2 Punkte) Nehmen Sie an, A und B seien unabhängig von λ. Beweisen Sie mit Hilfe einer Taylorentwicklung um $\lambda = 0$ das sogenannte *Baker-Hausdorff-Theorem*:

$$e^{\lambda B} A e^{-\lambda B} = A + \lambda[B, A] + \frac{\lambda^2}{2}[B, [B, A]] + \frac{\lambda^3}{3!}[B, [B, [B, A]]] + \dots .$$

c) (2 Punkte) Sei $A = x$ und $B = -ip/\hbar$. Erläutern Sie, welche Rolle der Operator

$$T(\lambda) = e^{-i\lambda p/\hbar}$$

spielt und zeigen Sie, dass $T(\lambda)$ unitär ist, d.h. $T^\dagger = T^{-1}$, wobei T^{-1} das Inverse des Operators T bezeichnet. Welche Wirkung hat dieser Operator auf eine Wellenfunktion $\psi(x)$?

d) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei hermitesche Operatoren A und B im Hilbertraum L^2, dass auch

- $A + B$, A^n,
- λA mit $\lambda \in \mathbb{R}$,
- $[A, B]_+ = AB + BA$,
- $i[A, B]$ mit $[A, B] = AB - BA$

  hermitesch sind.

Aufgabe 13: Die Stromdichte

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsstromdichte $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ (ohne äußeres Feld) als Funktion des Ortes und der Zeit für

a) eine ebene Welle,

b) das eindimensionale Wellenpaket (siehe Aufgabe 6).

Aufgabe 14: Zeitentwicklung eines Zustandes

Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Wellenfunktion eines Teilchens

$$\psi(\boldsymbol{r}, 0) = \alpha\phi_1(\boldsymbol{r}) + \beta\phi_2(\boldsymbol{r}),$$

wobei $\phi_{1,2}$ zwei normierte und orthogonale Lösungen der stationären Schrödingergleichung

$$\hat{H}\phi_{1,2} = E_{1,2}\phi_{1,2}$$

mit den Energieeigenwerten $E_{1,2}$ sind. α und β sind zwei komplexe Konstanten.

a) Bestimmen Sie eine Beziehung zwischen α und β aus der Normierungsbedingung für $\psi(\boldsymbol{r}, 0)$. Wie lassen sich $|\alpha|^2$ und $|\beta|^2$ interpretieren?

b) Berechnen Sie mit Hilfe der zeitabhängigen Schrödingergleichung die Zeitentwicklung der Wellenfunktion $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ für die Zeit $t > 0$.

c) Berechnen Sie den Energiemittelwert für das Teilchen im Zustand $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ und diskutieren Sie das Ergebnis.