



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**  
**Sommersemester 2023 - Übungsblatt 8**

Ausgabe: 14.06.2023, Abgabe: 21.06.2023, Übungen: 23.06.2023

**Aufgabe 21: Drehimpulsalgebra**

**(mündlich)**

a) (3 Punkte) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator

$$\hat{\mathbf{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)^T = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$$

bzw.  $\hat{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$  mit den bekannten Kommutatorrelationen der Orts- und Impulskomponenten:

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_j], [\hat{L}_i, \hat{p}_j], [\hat{L}_i, \hat{L}_j],$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i], [\hat{L}_i, \hat{r}^2], [\hat{L}_i, \hat{p}^2].$$

b) (2 Punkte) Zeigen Sie außerdem mit den Leiteroperatoren  $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$ , dass:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_{\pm}] = \pm \hbar \hat{L}_{\pm},$$

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_{\pm}] = 0,$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z,$$

$$\hat{L}_+ \hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar \hat{L}_z.$$

**Aufgabe 22: Eigenzustände von  $\hat{L}^2$  und  $\hat{L}_x$**

**(schriftlich - 6 Punkte)**

Als "Drehimpulsstandardbasis" bezeichnet man die orthonormierte Basis  $\{|l, m\rangle\}$  der simultanen Eigenzustände von  $\hat{L}^2$  und  $\hat{L}_z$ . In dieser Aufgabe sollen Sie für den Drehimpuls  $l = 1$  die Eigenzustände  $|1, \mu\rangle$  von  $\hat{L}_x$ , welche  $\hat{L}_x |1, \mu\rangle = \hbar \mu |1, \mu\rangle$  mit  $\mu = 0, \pm 1$  erfüllen, durch die Eigenzustände  $|1, m\rangle$  von  $\hat{L}_z$  ausdrücken.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren  $\hat{L}_{\pm} = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$  die Elemente der Matrix  $\langle 1, m' | \hat{L}_x | 1, m \rangle$ .

Hinweis:  $\hat{L}_{\pm} |l, m\rangle = \hbar \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)} |l, m \pm 1\rangle$ .

b) (2 Punkte) Entwickeln Sie  $|1, \mu\rangle$  in der Basis  $\{|1, m\rangle\}$  und geben Sie mit der Matrix aus (a) die Entwicklungskoeffizienten an.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie für die Eigenwerte von  $\hat{L}_x$  mit  $\mu = 0, \pm 1$  die dazugehörigen normierten Eigenzustände  $|1, \mu\rangle$ .

d) (1 Punkt) Einer der möglichen Eigenwerte ist  $\mu = 0$ . Geben Sie den Erwartungswert von  $\hat{L}_z$  sowie die möglichen individuellen Messwerte von  $\hat{L}_z$  in diesem Zustand an.

**Aufgabe 23: Unschärferelation für  $\hat{L}_x, \hat{L}_y$** **(mündlich)**

Verifizieren Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta O_1 \Delta O_2 \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{O}_1, \hat{O}_2] \rangle|$$

explizit für  $\hat{O}_1 = \hat{L}_x, \hat{O}_2 = \hat{L}_y$  und für die allgemeine Eigenfunktion von  $\hat{L}^2$  und  $\hat{L}_z$  mit Quantenzahlen  $l$  und  $m$ . Drücken Sie dazu  $\hat{L}_{x/y}$  durch Leiteroperatoren aus und benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Wirkung auf Drehimpulseigenzustände. Für welche  $m$  gilt bei gegebenem  $l$  Gleichheit in der Unschärferelation?

**Aufgabe 24: Kugelflächenfunktionen****(mündlich)**

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y_{l,m}^*(\vartheta, \varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}^*(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi') \delta(\cos \vartheta - \cos \vartheta')$$

und der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 d \cos \vartheta Y_{l',m'}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l,l'} \delta_{m,m'},$$

dass sich jede Funktion  $f$  nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt, d.h.

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

c) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von  $L^2$  und  $L_z$  alle zueinander orthonormal sind:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin \vartheta.$$

d) Verwenden Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben das Computer-Algebra-System MATHEMATICA™ z. B. im PC-Pool der Physik.

- i) Zeigen Sie die Normierung der in a) angegebenen Kugelflächenfunktionen, indem Sie die entsprechenden Integrale berechnen lassen.
- ii) Stellen sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen für  $l = 0, 1, 2$  und alle möglichen  $m$  graphisch dar.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Funktion SphericalPlot3D. In MATHEMATICA sind die Kugelflächenfunktionen verfügbar als SphericalHarmonicY[l, m,  $\theta$ ,  $\phi$ ].

- iii) Stellen Sie auch das Betragsquadrat der folgenden Kombinationen von Kugelflächenfunktionen dar und vergleichen Sie mit ii)

$$Y_{11} + Y_{1-1}, Y_{11} - Y_{1-1}, \\ Y_{21} + Y_{2-1}, Y_{21} - Y_{2-1}, Y_{22} + Y_{2-2}, Y_{22} - Y_{2-2}.$$