Universität Konstanz

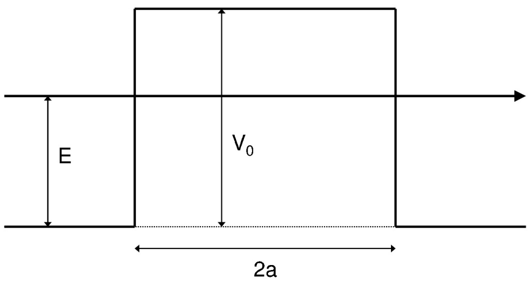
Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp) Sommersemester 2023

Prof. Dr. Mikhail Fonin

Übungsblatt 6, Ausgabe: 22.05.2023, Abgabe: **29.05.2023 bis 12.00 Uhr**
Besprechung in den Übungen am 31.05.2023

Aufgabe 1: α-Zerfall und Tunneleffekt (schriftlich abzugeben) (**8 Punkte**)

Die Transmissionswahrscheinlichkeit durch eine symmetrische Rechteckbarriere der Breite $2a$ lautet folgendermaßen: $T = \frac{1}{1+(1+(\varepsilon^2/4))\sinh^2(2\kappa a)}$ wobei $\varepsilon = \frac{\kappa}{k} - \frac{k}{\kappa}$, $k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\kappa = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.

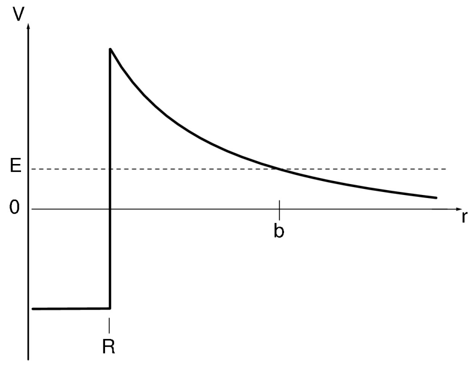


a) Zeigen Sie, dass für eine sehr dicke Barriere, also $\kappa a \gg 1$, sich die Transmissionswahrscheinlichkeit sehr gut als

$$T \approx \frac{16E(V_0 - E)}{V_0^2} \exp(-4\sqrt{2m(V_0 - E)}\frac{a}{\hbar}) \qquad (*)$$

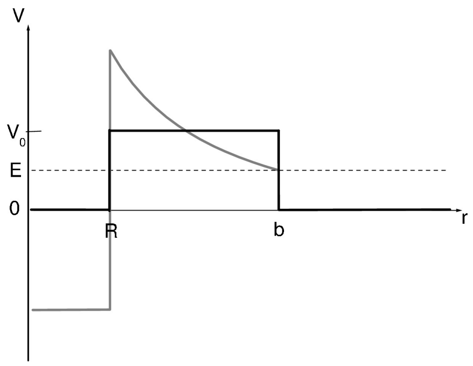
nähern lässt.

b) Als Beispiel für das Tunneln durch eine Potentialbarriere wollen wir den α-Zerfall betrachten, d.h die Aussendung eines α-Teilchens (He-Kern = 2 Protonen und 2 Neutronen) aus einem Atomkern. Für das α-Teilchen sieht das durch die restlichen Kernbestandteile verursachte Potential grob folgendermaßen aus: Innerhalb des Kernradius R wird es durch Kernkräfte gebunden (tiefer Potentialtopf). Entfernt sich das α-Teilchen über R hinaus von der Kernmitte, verhalten sich α-Teilchen und Restkern wie zwei entsprechende positive Punktladungen. Für $r > R$ setzen wir das Coulombpotential an. Wie lautet $V(r)$ für $r > R$?

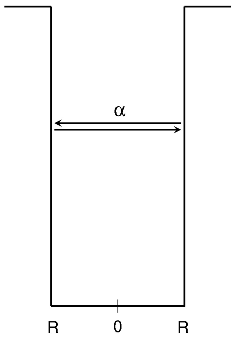


Hat das α-Teilchen im Kern bereits eine Energie $E > 0$, kann es durch die Barriere tunneln und den Kern verlassen. Die Barriere ist nicht rechteckig, und das Potentialniveau außerhalb ist auch nicht auf beiden Seiten dasselbe. Bei vorgegebenem E lässt sich zunächst der Ort (Radius) b bestimmen, wo der Austritt aus der Barriere erfolgt, und somit die gesehene Barrierendicke.

Um (*) anwenden zu können, vereinfachen Sie das Potential wie unten skizziert. Nehmen Sie $V = 0$ an für $r < R$ und $r > b$. Mitteln Sie alle Werte des $1/r$-Potentials zwischen R und b und bestimmen Sie so ein V_0 als Höhe einer Rechteckbarriere, durch die Sie die "schräge" Barriere sinnvoll ersetzen können. Polonium werde durch α-Zerfall in Blei umgewandelt (entsprechende Isotope, so dass mit Weggang des α-Teilchens auch die Neutronenzahl erhalten bleibt). Nehmen Sie weiter $R = 1 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{m}$ und $E = 10\,\mathrm{MeV}$ als gegebene Zahlenwerte an sowie $m_\alpha = 4\,m_P$. Berechnen Sie b, V_0 und T.



Um eine Zerfallswahrscheinlichkeit zu bestimmen, muss man außer der Transmissionswahrscheinlichkeit durch die Barriere noch die "Klopffrequenz" kennen, mit der das α-Teilchen gegen die Ränder des Kernpotentials stößt. Um diese abzuschätzen, interpretieren Sie $E = 10\,\mathrm{MeV}$ als nicht-relativistische kinetische Energie des α-Teilchens. Das α-Teilchen werde ganz klassisch radial durch den Kern hin- und herreflektiert.



c) Schätzen Sie aus Klopffrequenz und Transmissionswahrscheinlichkeit eine Halbwertszeit ab, wann das α-Teilchen mit 50-prozentiger Wahrscheinlichkeit den Kern verlassen hat. Informieren Sie sich über Halbwertszeiten von Poloniumisotopen. Haben wir mit der vereinfachten Rechnung hier eine Chance, in der richtigen Größenordnung zu liegen?

Aufgabe 2: Erste Überlegungen zum Bohrschen Atom-Modell (1 Häkchen)

Das Elektron im Bohrschen Atom-Modell bewegt sich auf einer Kreisbahn um den Kern. Die Bahnen und damit auch der Drehimpuls L des Elektrons seien quantisiert, mit $L = n\hbar$.

a) Zeigen Sie, dass dies äquivalent ist, mit der möglichen Annahme, dass der Umfang der Kreisbahn ein n-Faches der de Broglie-Wellenlänge sein muss.

b) Für eine stabile Kreisbahn muss die Zentripetalkraft der Coulomb-Kraft gleichen; schreiben Sie die entsprechende Gleichung auf für einen Atomkern mit Ladungszahl Z.

c) Wählen Sie Ihren Favoriten aus den beiden Varianten der Quantisierung aus a). Bestimmen Sie daraus, und aus b), die quantisierten Bahnradien r_n und Geschwindigkeiten v_n des Elektrons.

d) Leiten Sie die quantisierte kinetische Energie des Elektrons, $E_{kin,n}$, her und sodann die quantisierte Gesamtenergie E_n, die kleiner Null sein sollte.

Aufgabe 3: Weitere Überlegungen zum Bohrschen Atom-Modell (1 Häkchen)

Das Bohrsche Atom-Modell kann das Auftreten von Spektrallinien erklären, indem angenommen wird, dass Elektronen unter Absorption oder Emission eines Photons zwischen verschiedenen Kreisbahnen springen können. Die Energie des Photons $\hbar\omega$ ist dann die Differenz $E_{n_2} - E_{n_1}$. Emissionslinien, die auf demselben unteren Niveau enden, werden zu Serien zusammengefasst.

a) Nennen Sie die Namen dieser Serien für Wasserstoff. Berechnen Sie für die untersten vier Serien jeweils die Wellenlänge der untersten Linie, also für die Übergänge $n = 2 \to n = 1, n = 3 \to n = 2, n = 4 \to n = 3$ und $n = 5 \to n = 4$. Welche Linien liegen im sichtbaren Bereich (zwischen 400 nm und 800 nm)?

b) Berechnen Sie den Bahnradius des Elektrons für ein Wasserstoffatom im Zustand $n = 30$. Geben Sie für den Übergang $n = 30 \to n = 29$ die zugehörige Wellenlänge an. In welchem Spektralbereich liegt diese? Informieren Sie sich, wo sogenannte Rydberg-Atome natürlich vorkommen und mit welcher Methode man sie im Labor erzeugen und auch die für hohe n sehr dicht liegenden Energieniveaus selektiv ausmessen kann.