Universität Konstanz

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp) Sommersemester 2023

Prof. Dr. Mikhail Fonin

Übungsblatt 7, Ausgabe: 29.05.2023, Abgabe: 12.06.2023
Besprechung in den Übungen am 14.06.2023

Aufgabe 1. Schwingungen (10 Punkte)
(schriftlich abzugeben)

Teil 1: 2D Schwingungen

Ein Teilchen verspüre das Potential eines zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators. Der Hamiltonoperator lautet $\hat{H} = \hat{H}_x + \hat{H}_y$ mit

$$\hat{H}_x = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 x^2 \tag{1}$$

$$\hat{H}_y = \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m}{2}\omega^2 y^2 \tag{2}$$

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Schrödingergleichung $\hat{H}\Psi = E\Psi$ durch einen Separationsansatz $\Psi(x,y) = \Psi_x(x) \cdot \Psi_y(y)$ gelöst wird, wobei Ψ_x und Ψ_y jeweils Lösungen der Schrödingergleichung des eindimensionalen harmonischen Oszillators zu den Eigenwerten E_x und E_y sind. Was gilt dann für E? Hinweis: Wenn ein Ausdruck, der nur von x abhängt, gleich einem Ausdruck ist, der nur von y abhängt, müssen beide ein und dieselbe Konstante sein. **(2 Punkte)**

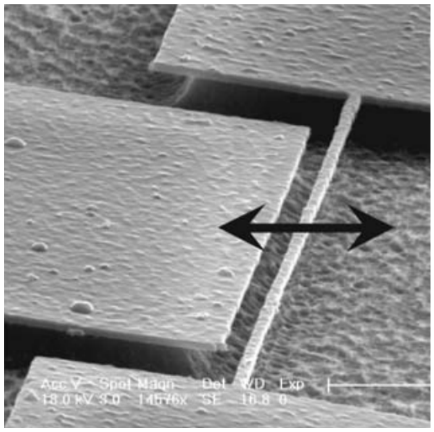
b) Zählen Sie die möglichen Energieeigenwerte E auf. Diskutieren Sie die Entartung der drei niedrigsten Niveaus. Hinweis: Zeigen Sie zunächst mithilfe Ihrer Ergebnisse aus a): $E_n = \hbar\omega(n_x + n_y + 1) = \hbar\omega(n + 1)$. **(2 Punkte)**

Teil 2: Reale harmonische Oszillatoren

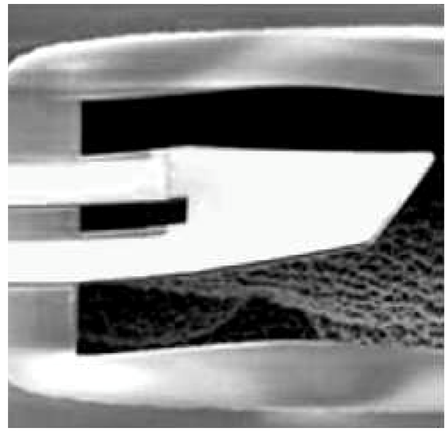
Das linke Bild zeigt einen nanomechanischen Resonator, also eine Nanostruktur, die zu mechanischen Schwingungen angeregt werden kann. Die Saite ist aus Siliziumnitrid und auf ein Quartzsubstrat aufgebaut. Abmessungen: 55 µm lang, 100 nm dick und 200 nm breit. Dichte von Siliziumnitrid: $2{,}8 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, Zugspannung: 1,4 GPa. Die Frequenz f_m der m-ten Biegemode ist in sehr guter Näherung

$$f_m = \frac{m}{2L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \tag{3}$$

mit Modenindex m, Länge L, Zugspannung σ und Dichte ρ.



Kozinsky et al., Appl. Phys. Lett. 88 (2006)



O'Connell et al., Nature 464, 697 (2010)

a) Betrachten Sie die Grundmode der Saite ($m = 1$) als quantenharmonischen Oszillator, der wie üblich Energieeigenzustände mit Index n hat. Berechnen Sie die ersten drei Energieeigenwerte und den Abstand der Energieeigenwerte. Welcher Temperatur entspricht die Nullpunktsenergie? Kann diese Mode bei Raumtemperatur sinnvoll als quantenharmonischer Oszillator betrachtet werden? Berechnen Sie die Nullpunktfluktuationen dieser Biegemode. **(2 Punkte)**

b) Beantworten Sie die in a) gestellten Fragen zum Vergleich für eine Gitarrensaite mit Mensur (also schwingender Länge zwischen Sattel und Steg des Instruments) von 65 cm, Durchmesser 0,6 mm, Dichte (Nylon) $1{,}15 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$, und Zugspannung 1,5 GPa. **(2 Punkte)**

c) Der Resonator im rechten Bild ist ein sogenannter *thin film bulk acoustic resonator* (FBAR). FBARs sind zum Beispiel in jedem Handy als Frequenzfilter enthalten. Ein FBAR besteht aus einem piezoelektrischen Material zwischen zwei Elektroden. Dieser FBAR ist aus Aluminiumnitrid; die obere und untere Elektrode ist aus Aluminium. Beim Anlegen einer elektrischen Spannung ändert sich die Dicke des FBAR. Durch eine Wechselspannung mit der geeigneten Frequenz kann er zu Dickenschwingungen angeregt werden. Die Frequenz der niedrigsten Dickenschwingungsmode ist

$$f \approx \frac{c}{2d} \tag{4}$$

mit Schallgeschwindigkeit c und Dicke d. Abmessungen: Dicke der Aluminiumnitridschicht 330 nm, Dicke der Aluminiumelektroden je 130 nm (laterale Abmessungen ca. 50 μm, fast noch mit bloßem Auge sichtbar). Schallgeschwindigkeit 9100 m/s. Vergleichen Sie die Energieeigenwerte dieses Resonators mit denen des nanomechanischen Resonators aus a). **(2 Punkte)**

Aufgabe 2: Noch weitere Überlegungen zum Bohrschen Atom-Modell

(1 Häkchen)

Gemäß klassischer Elektrodynamik strahlt eine Ladung, wenn sie beschleunigt wird. Die abgestrahlte Leistung wird für nicht-relativistische Geschwindigkeiten durch die Larmor-Formel beschrieben:

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

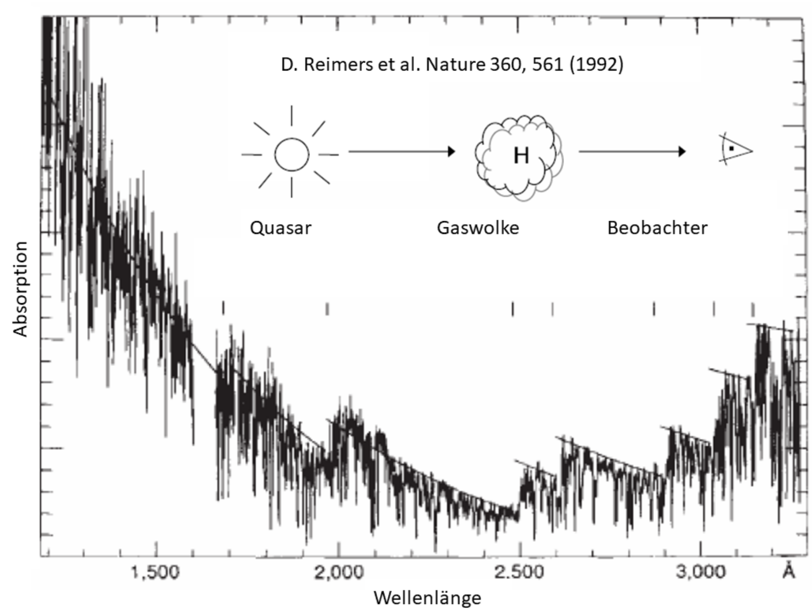
Im Bohrschen Atom-Modell, angewandt auf das Wasserstoffatom, bewegt sich das Elektron im Grundzustand auf einer Kreisbahn mit Radius r_1 im Bann der Coulomb-Anziehung durch das Proton.

a) Berechnen Sie r_1.

b) Im Sinne obiger Einleitung strahlt dieses Elektron, verliert deshalb Energie und stürzt in einer Spirale in den Kern. Zeigen Sie, dass $v < 0{,}1c$ für den Großteil des Sturzes; berechnen Sie hierfür den Radius, bei dem die genannte Geschwindigkeit erreicht wird.

c) Berechnen Sie die Lebensdauer dieses Bohr-Wasserstoffatoms; nehmen Sie dabei an, jede Umrundung sei im Wesentlichen eine Kreisbahn.
Hinweis: Finden Sie zunächst einen Ausdruck für die radiale Geschwindigkeit, mit der das Elektron in den Kern fällt $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$. Erweitern Sie dazu $P = -\mathrm{d}E/\mathrm{d}t$. Berechnen Sie dann die Gesamtenergie des Elektrons $E(r) = E_{\mathrm{kin}}(r) + E_{\mathrm{pot}}(r)$ in Abhängigkeit des Radius.

d) Als Lyman-Alpha-Wald bezeichnen Astronomen eine Vielzahl von scharfen Absorptionslinien im Spektrum von Quasaren, deren Wellenlänge nur geringfügig kleiner als die der Lyman-Alpha-Linie, der Absorptionslinie des neutralen Wasserstoffs, ist. Wie Untersuchungen zeigten, nimmt die Anzahl dieser Linien mit der Entfernung der Objekte zu, woraus die Astronomen ableiteten, dass die Linien nicht von den Objekten selbst hervorgerufen werden, sondern von Wasserstoffwolken stammen, die sich zwischen den Objekten und der Erde befinden.



Die Wolken absorbieren dabei jeweils das Licht mit den Wellenlängen der Lyman-Linien. Durch die unterschiedliche Entfernung der Wolken besitzen diese aber eine unterschiedliche Rotverschiebung, wodurch die Linien an unterschiedlicher Stelle im Spektrum auftauchen. Damit lassen sich aus der Anzahl, der Verteilung und der

Stärke der Absorptionslinien Rückschlüsse auf die Verteilung und Massen der Wolken im Universum ziehen. Dabei ist auch zu beachten, dass wir mit größerer Entfernung bzw. Rotverschiebung auch immer weiter in die Vergangenheit des Universums blicken. Eine kosmologische Rotverschiebung von z bedeutet, dass das Licht von diesem Ort zu einer Zeit ausgesandt wurde, als das Universum $(z + 1)$ mal kleiner war als heute.

Das obenstehende Quasarspektrum, aufgenommen mit dem Hubble-Weltraum-Teleskop, zeigt sieben Kanten eines Lyman-Walds. Berechnen Sie nach

$$z = (\lambda_{\text{beobachtet}} - 911{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{m})/911{,}8 \cdot 10^{-10}\,\text{m}$$

die zugehörigen Rotverschiebungen.