Universität Konstanz

Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp)
Sommersemester 2023

Prof. Dr. Mikhail Fonin

Übungsblatt 9, Ausgabe: 19.06.2023, Abgabe: **26.06.2023 bis 12.00 Uhr**
Besprechung in den Übungen am 28.06.2023

Aufgabe 1: Auswahlregeln und Übergange (schriftlich abzugeben) (10 Punkte)

Durch ein kluges Ausnutzen der Vertauschungsrelationen für den Drehimpuls gelangt man auch zu den Ihnen bereits bekannten Auswahlregeln. Betrachten Sie ein kugelsymmetrisches System, was durch die Quantenzahlen n, l, m charakterisiert ist. Die Übergangsmatrixelemente lassen sich wie folgt schreiben:

$$\langle n'l'm'|\vec{r}\,|nlm\rangle$$

a) Befassen Sie sich zunächst mit den Auswahlregeln für m. Benutzen Sie Kommutatoren von L_z und x, y, z. Ihre Aufgabe besteht erstmal nun darin, folgenden Ausdruck

$$\langle n'l'm'|[L_z, z]|nlm\rangle$$

auszuwerten. Daraus resultiert die Forderung $\Delta m = 0$. (1 Punkt)

b) Machen Sie mit den beiden verbleibenden Kommutatoren $[L_z, x]$ und $[L_z, y]$ weiter. Die Kombination der beiden führt Sie auf die Auswahlregel $\Delta m = \pm 1$. (2 Punkte)

c) Welcher Kommutator wird für die Herleitung der Auswahlregel $\Delta l = \pm 1$ genutzt? Hier sollen anhand der relevanten Größen Überlegungen angestellt werde, also keine Rechnung. (1 Punkt)

Ein Elektron im Wasserstoffzustand mit $n = 3, l = 0, m = 0$ zerfällt in einer Folge von elektrischen Dipol-Übergängen in den Grundzustand.

d) Welche Zerfallswege stehen dem Elektron im Zustand $|300\rangle$ offen? Geben Sie diese in folgender Schreibweise an:
$|300\rangle \to |nlm\rangle \to |n'l'm'\rangle \to ... \to |100\rangle$
(1 Punkt)

e) Betrachten Sie nun eine große Anzahl an Elektronen in diesem Zustand. Welcher Anteil von ihnen zerfällt über die einzelnen Zerfallswege aus $d)$? (3 Punkte)

(i) Überlegen Sie sich, welche Matrixelemnte dafür relevant sind und schreiben Sie diese in Komponenten auf.

(ii) Bestimmen Sie die Größen

$$|\langle n'l'm'|\vec{r}\,|nlm\rangle|^2$$

für die vorliegenden Übergänge. Nutzen Sie dabei folgende Werte für die Komponenten:

$$|\langle 210|z|300\rangle|^2 = \alpha^2/3 \text{ und } 2|\langle 21\pm 1|x|300\rangle|^2 = \alpha^2/3.$$

Dabei ist $\alpha = \frac{2^7 3^4}{5^6}\sqrt{2}a$.

f) Welche Lebensdauer $\tau = 1/A$ hat der Zustand des Elektrons $|300\rangle$? Betrachten Sie die dafür relevanten Übergänge und bestimmen Sie die jeweiligen Einsteinkoeffizienten für spontane Emission A_{ik}. Wie Sie bereits aus Kapitel 1 wissen, ist A_{ik} mit B_{ik}, den wir in Kapitel 6 hergeleitet haben, verknüpft. A_{ik} gibt dabei die Zerfallsrate pro Zerfallsweg an. (2 Punkte)

Aufgabe 2: Gravitationsgebundenes Wasserstoffatom (1 Kreuzchen)

Betrachten Sie das System Sonne-Erde als gravitationsgebundenes Analogon zum Wasserstoffatom. Hierbei ersetzt das Gravitationspotential das Coulomb Potential des Wasserstoffmodells.

a) Geben Sie das Gravitationspotential V(r) für das Gravitationssystem an, indem Sie für m die Masse der Erde und für M die Masse der Sonne nutzen. Vergleichen Sie die Vorfaktoren des Gravitations- zum Coulomb-Potential.

b) Leiten Sie aus der Analogie der Potentiale (bzw. der Vorfaktoren) den "Bohr'sche Radius" a_g (g: gravitativ gebunden) für das Sonne-Erde System her. Berechnen Sie den Zahlenwert!

c) Schreiben Sie die "Bohr'sche Formel" ($E_n \propto \frac{1}{n^2}$) der erlaubten Energieniveaus für das gravitationsgebundene System nieder!

d) Setzen Sie E_n und die klassiche Energie für einen Planeten auf einer kreisförmigen Bahn mit dem Radius r_B gleich; zeigen Sie damit, dass $n = \sqrt{r_B/a_g}$ gilt. Schätzen Sie anhand dieses Wertes die Quantenzahl n der Erde ab.

e) Nehmen Sie an, die Erde würde einen Übergang zum nächstniedrigen Energieniveau (n-1) durchführen. Wie veil Energie wird dabei frei? Wie grlß wäre die Wellenlänge des emittierten Photons (bzw. Gravitons). Geben Sie Ihre Antwort in Lichtjahren an. Ist die bemerkenswerte Antwort ein Zufall?

Aufgabe 3: Elektron im Kern (1 Kreuzchen)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit P, ein Elektron im Grundzustand von Wasserstoff im Inneren des Kerns zu finden?

a) Berechnen Sie zunächst die exakte Antwort unter der Annahme, dass die Wellenfunktion

$$\Psi_{100}(r, \theta, \Phi) = \frac{1}{\sqrt{(\pi a^3)}} \cdot e^{-r/a} \tag{1}$$

bis hinab zu r = 0 gilt. Bezeichnen Sie den Kernradius mit b.

b) Entwickeln Sie das Ergebnis aus a) in einer Potenzreihe und zeigen Sie, dass der kubische Term der Term niedrigster Ordnung ist:

$$P = \frac{4}{3}\left(\frac{b}{a}\right)^3 \tag{2}$$

Nutzen Sie dafür $\epsilon \equiv 2b/a$. Für kleine ϵ gilt: $e^{-\epsilon} \approx \sum(-1)^n \cdot \frac{\epsilon^n}{n!}$. Da b $\ll$ a ist dies eine passende Näherung.

c) Alternativ könnten wir annehmen, dass $\psi(r)$ über dem winzigen Volumen des Kerns im Wesentlichen konstant ist, sodass

$$P \approx \frac{4}{3}\pi b^3 |\psi(0)|^2 \tag{3}$$

gilt. Prüfen Sie nach, dass Sie auf diese Weise dasselbe Ergebnis bekommen.

d) Setzen sie b $\approx 10^{-15}$ m und a $\approx 5^{-11}$ m und bestimmen Sie damit numerisch einen Näherungswert für P. Man könnte diesen Wert als “Anteil der Zeit, in dem sich das Elektron im Inneren des Kerns befindet “bezeichnen.