Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp)
Sommersemester 2023

Prof. Dr. Mikhail Fonin

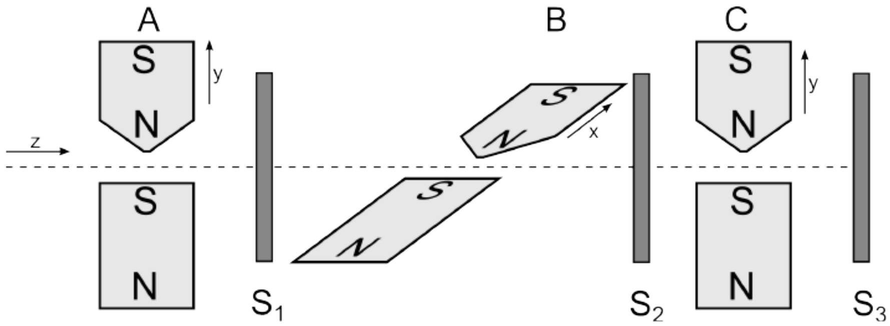
Übungsblatt 10, Ausgabe: 26.06.2023, Abgabe: 03.07.2023
Besprechung in den Übungen am 05.07.2023

Aufgabe 1: Stern-Gerlach-Versuch (schriftlich abzugeben) (9 Punkte)

a) Durch einen Stern-Gerlach-Aufbau werden Silberatome ($S = \frac{1}{2}, L = 0$) mit zufälliger Spinorientierung geschossen und auf einem Schirm hinter dem Aufbau beobachtet. Welches Bild ergibt sich auf dem Schirm? Was für ein Bild würde man für ideale klassische magnetische Dipole erwarten (ohne innere Freiheitsgrade)? **2 Punkte**

b) Was ist zu beobachten, wenn man anstatt Silberatomen Elektronen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ benutzt? **1 Punkt**

c) Nun werden drei Stern-Gerlach-Filter A, B und C mit unterschiedlichen Raumorientierungen hintereinander gestellt. Als Teilchen werden wieder Silberatome genutzt.



Zwischen den Schirmen befindet sich jeweils ein Schirm, der Atome passieren lässt ohne ihren Spin zu beeinflussen, aber ihre Position durch Leuchten anzeigt. Skizzieren Sie die Bilder auf den Schirmen S_1 bis S_3. **1.5 Punkte**

d) Wie ändern sich die Bilder wenn die Filter B und C vertauscht werden? **1.5 Punkte**

e) Nun wird der Stern-Gerlach-Versuch mit Wasserstoffatomen durchgeführt. Diese befinden sich im Grundzustand und besitzen eine mittlere Geschwindigkeit $v_x = 14,5\ km/s$ in x-Richtung. Das inhomogene Magnetfeld B verläuft in z-Richtung und hat einen maximalen Gradienten von $dB_z/dz = 600\ T/m$.

Berechnen Sie die maximale Beschleunigung der H-Atome. **1 Punkt**

f) Das B-Feld erstrecke sich über eine Länge $\Delta x_1 = 0,75\ m$ und der Detektor liege in einem Abstand von $\Delta x_2 = 1,75\ m$ hinter dem 'Ende' des Magnetfeldes. Berechnen Sie den Abstand der beiden Flecken auf dem Detektor. Nehmen Sie der Einfachheit halber an, die maximale Beschleunigung finde im gesamten Bereich des Feldes statt, und dahinter urplötzlich nicht mehr. **2 Punkte**

Aufgabe 2: Doppler-Verbreitung von Spektrallinien (1 Kreuzchen)

Es soll die Spektrallinie einer Straßenlaterne (Natrium-Dampflampe) bestimmt werden. Wir ignorieren, dass es sich in Wahrheit um eine Doppel-Linie handelt. Die Lampe wird bei 500 K betrieben. Die Messung ergibt ein Gaußprofil mit einer Halbwertsbreite von $\delta\omega_D = 1.07 \times 10^{10}\,\mathrm{s}^{-1}$.

a) Die Dopplerverschiebung führt zu einer wesentlichen Verbreiterung der spektralen Linie. Welcher physikalische Mechanismus führt zur Dopplerverbreiterung? Schätzen Sie grob ab, ob zur Herleitung dieser relativistisch gerechnet werden muss oder der klassische Grenzfall zur Beschreibung ausreicht.

b) Betrachten Sie zunächst ein Atom, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt und ein Photon mit der Frequenz ω_0 in Richtung $\vec{k}$ emittiert. Welche Frequenz „sieht“ ein ruhender Beobachter? Welche Frequenz müsste eine Lichtwelle (die in z-Richtung einfällt) haben, damit das bewegte Atom Photonen der Frequenz ω_0 absorbieren kann?

c) Betrachtet werden nun Atome in einem Gas bei $T = 500\,\mathrm{K}$ im thermischen Gleichgewicht. Berechnen Sie die Anzahl der Atome, deren Emission bzw. Absorption in das Frequenzintervall zwischen ω und $\omega + d\omega$ fallen. Berechnen Sie hieraus die emittierte/absorbierte Strahlungsleistung $P(\omega)d\omega$.
Hinweis: Benutzen Sie die Maxwell'sche Geschwindigkeitsverteilung

$$n_i(v_z)dv_z = \frac{N_i}{v_\omega\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{v_z}{v_\omega}\right)^2\right] dv_z$$

mit $v_\omega = \sqrt{\frac{2k_BT}{m}}$: wahrscheinlichste Geschwindigkeit
und $N_i = \int_{-\infty}^{\infty} n_i(v_z)dv_z$: Gesamtzahl der Atome im Zustand E_i pro Volumeneinheit.

d) Berechnen Sie die Halbwertsbreite $\delta\omega_D(\omega_0, T, m) = |\omega_- - \omega_+|$ mit $P(\omega_-) = P(\omega_+) = P(\omega_0)/2$. (Ergebnis: $\delta\omega_D = \frac{\omega_0}{c}\sqrt{\frac{8k_BT \cdot \ln 2}{m}}$)

e) Wie groß ist die Wellenlänge der Natrium D-Linie ($\Delta E = 2.1\,\mathrm{eV}$)? Welche Farbe hat die Straßenlaterne? Vergleichen Sie die Dopplerverbreiterung mit der natürlichen Linienbreite der Na-D Linie (Lebensdauer $\tau = 16\,\mathrm{ns}$).
(Molmasse $M_{Na} = 0.023\,\mathrm{kg/mol}$).

Aufgabe 3: Natürliche Linienbreite (1 Kreuzchen)

Ein angeregtes Atom kann durch Abstrahlung elektromagnetischer Strahlung Energie abgeben (spontane Emission). Dieser Vorgang kann durch das klassische Modell des harmonischen Oszillators beschrieben werden. Die Bewegungsgleichung für den zeitlichen Verlauf der Schwingungsamplitude (analog zum Hertzschen Dipol) lautet

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,$$

dabei beschreibt γ die Dämpfung und $\omega_0 = \sqrt{D/m}$ die Eigenfrequenz mit Masse m und Rückstellkonstante D.

a) Bestimmen Sie die reelle Lösung für $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = 0$. Vereinfachen Sie die Lösung mit der Annahme $\gamma \ll \omega_0$.

b) Leiten Sie das Linien-Lorentzprofil $|A(\omega)|^2$ als Fouriertransformierte der gedämpften Schwingung her. Nehmen Sie dazu an, dass die Anregung instantan zum Zeitpunkt $t = 0$ geschieht, das heißt $x(t) = 0$ für $t < 0$. In der Nähe der Resonanzfrequenz gilt $(\omega_0 - \omega) \ll \omega_0$, daher lässt sich $A(\omega)$ für hohe Frequenzen sinnvoll vereinfachen.

c) Skizzieren Sie $x(t)$ und $|A(\omega)|^2$.

d) Bislang sind wir bei dieser Aufgabe in der klassischen Näherung geblieben, wobei ausgehend vom gedämpften harmonischen Oszillator die entsprechende Linienform abgeleitet wurde. Überlegen Sie sich, wie Sie das gleiche Ergebnis ausgehend aus der Quantenmechanik erhalten können. *Hinweis: Blatt 5, Aufgabe 3.*