



**Übungen zur Physik IV: Integrierter Kurs (Exp)  
Sommersemester 2023**

**Prof. Dr. Mikhail Fonin**

**Übungsblatt 12**, Ausgabe: 10.07.2023, Abgabe: **17.07.2023 bis 12.00 Uhr**  
Besprechung in den Übungen am 19.07.2023

Aufgabe 1: Unterscheidbare und ununterscheidbare Teilchen (schriftlich abzugeben)  
(10 Punkte)

Betrachten Sie zwei nicht miteinander wechselwirkende Teilchen der Masse  $m$  in einem unendlich tiefen rechteckigen Potentialtopf. Die zugehörigen Ein-Teilchen-Zustände sind gegeben durch:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \quad (1)$$

Mit den zugehörigen Energieeigenwerten:

$$E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (2)$$

- a) Geben Sie den Hamilton-Operator für zwei nicht wechselwirkende identische Teilchen im unendlich tiefen rechteckigen Potentialtopf an. Gehen Sie von der Gesamtwellenfunktion

$$\Psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \Psi_{n_1}(x_1) \Psi_{n_2}(x_2) \quad (3)$$

aus. Welche Normierungsbedingung muss für  $x_1$  und  $x_2$  im Bezug auf die Breite  $a$  des Potentialtopfs gelten? **(1 Punkt)**

- b) Betrachten wir nun den Fall für unterscheidbare Teilchen. Hierbei ist die Gesamtwellenfunktion wie oben angegeben.

Mit Energieeigenwerten

$$E_{n_1 n_2} = (n_1^2 + n_2^2) \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \quad (4)$$

Wie sieht für unterscheidbare Teilchen mit der angegebenen Wellenfunktion  $\Psi_n(x)$  der Grundzustand und der erste angeregte Zustand aus? Welche Energien besitzen diese Zustände und wie sieht es mit der Entartung aus? **(2 Punkte)**

- c) Zeigen Sie, dass der Grundzustand von zwei ununterscheidbaren Teilchen mit der antisymmetrischen Gesamtwellenfunktion (Fermionen) eine Eigenfunktion von  $H$  mit dem passenden Eigenwert ist. Wie groß ist der Energieeigenwert dieses Grundzustandes? **(2 Punkte)**

- d) Bisher wurden unterscheidbare Teilchen und Fermionen betrachtet. Natürlich fehlt nun noch der Fall für identische Teilchen mit der symmetrischen Gesamtwellenfunktion (Bosonen). Schreiben Sie den Grundzustand und ersten angeregten Zustand für diesen Fall auf mit Energieeigenwerten und Entartungsgrad. **(2 Punkt)**
- e) Geben Sie die nächsten zwei angeregten Zustände (über die bisher behandelten hinaus) - d.h. die Wellenfunktionen und die Energien für jeden der drei Fälle an (unterscheidbare Teilchen, Fermionen, Bosonen) **(3 Punkte)**