



**Quantencomputing und Quantensimulation  
 Sommersemester 2022 - Übungsblatt 2**

Ausgabe: 25.04.2022, Abgabe: 02.05.2022, Übungen: 05.05.2022

**Aufgabe 4: Zeitabhängige Störungstheorie (5 Punkte)**

Gegeben sei die Schrödinger-Gleichung in integraler Form für einen zeitabhängigen Hamiltonoperator

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle - \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t') |\psi(t')\rangle \quad (1)$$

mit Anfangsbedingung  $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_0\rangle$ . Um eine erste Näherung für  $|\psi(t)\rangle$  zu erhalten, kann im Integral auf der rechten Seite von Gleichung (1)  $|\psi(t')\rangle$  durch die ursprüngliche Wellenfunktion  $|\psi_0\rangle$  ersetzt werden. Durch wiederholtes einsetzen der so erhaltenen neuen Wellenfunktion kann Gleichung (1) störungstheoretisch bestimmt werden.

- a) (1 Punkt) Leiten Sie Gleichung (1) ausgehend von der Schrödinger-Gleichung her.
- b) (1 Punkt) Berechnen Sie die ersten beiden Korrekturterme der beschriebenen Störungstheorie.
- c) (2 Punkte) Beschreiben Sie den Unterschied zu folgender (unter Umständen falscher) exakten Lösung

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \hat{H}(t')\right) |\psi_0\rangle. \quad (2)$$

Unter welchen Voraussetzungen stellt Gleichung (2) eine korrekte Lösung dar?

- d) (1 Punkt) Gegeben sei ein zeitabhängiger Hamiltonoperator der Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \text{rect}\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right) \hat{V}, \quad (3)$$

wobei

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie  $|\psi(t)\rangle$  für  $t > t_0 + \Delta t/2$ .

*Hinweis: Beschreiben Sie die Lösung mithilfe eines Zeitentwicklungsoperators  $\hat{U}(t)$ ,  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t) |\psi_0\rangle$ . Teilen Sie dazu die Entwicklung in Teilabschnitte mit konstantem  $\hat{H}$  auf und verwenden Sie die allgemeine Eigenschaft  $\hat{U}(t, t_0) = \hat{U}(t, t') \hat{U}(t', t_0)$  für beliebige  $t > t' > t_0$ .*

### Aufgabe 5: Die Blochkugel (4 Punkte)

Mithilfe einer Blochkugel kann die Wellenfunktion eines Zweizustandsystems durch den Blochvektor  $\mathbf{p}$  wie folgt dargestellt werden:

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi} \sin(\theta/2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{p} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

a) (1 Punkt) Skizzieren sie die Blochkugel und markieren Sie die Eigenzustände der drei Pauli-matrizen.

b) (1 Punkt) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor  $\mathbf{n}$  den Erwartungswert  $\langle \theta, \varphi | \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} | \theta, \varphi \rangle$  und drücken Sie diesen durch den Blochvektor  $\mathbf{p}$  aus.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass

$$R_{\mathbf{n}}(\alpha) = \exp(-i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2)$$

mit  $\mathbf{n}^2 = 1$  eine Ein-Qubit-Rotation mit Winkel  $\alpha$  um die Rotationsachse  $\mathbf{n}$  beschreibt.

c) (1 Punkt) Leiten Sie zunächst folgende Beziehung her:

$$R_{\mathbf{n}}(\alpha) = \cos(\alpha/2) \mathbb{1} - i \sin(\alpha/2) (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}).$$

d) (1 Punkt) Berechnen Sie  $R_{\mathbf{n}}(\alpha) |\theta, \varphi\rangle$  für den Fall  $\mathbf{n} = \hat{\mathbf{e}}_z$ .

### Aufgabe 6: Klassische Speicherung eines Quantenzustandes (1 Punkt)

Google's Quantenprozessor 'Sycamore' besteht aus 53 Qubits. Berechnen Sie den klassischen Speicher der benötigt wird um die vollständige Wellenfunktion aller Qubits zu speichern.

*Hinweis: Gewöhnlicherweise werden 32 Bits verwendet um eine einzelne Gleitkommazahl zu speichern. Wie viele Gleitkommazahlen werden benötigt um die Wellenfunktion eines einzelnen Qubits zu charakterisieren?*