UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
https://www.burkard.uni-konstanz.de/

Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 11
Ausgabe: 23.01.2023, Abgabe: 30.01.2023, Übungen: 02.02.2023

Aufgabe 34: Eigenschaften der Lorentz-Transformation (schriftlich, 4 Punkte)

Die allgemeine Lorentz-Transformation in der 4D-Raumzeit $x^\mu \to x'^\mu = \Lambda^\mu_{\ \nu} x^\nu$ wird beschrieben durch eine reelle 4x4-Matrix $\Lambda = (\Lambda^\mu_{\ \nu})$, deren Elemente die Gleichung $g_{\kappa\lambda}\Lambda^\kappa_{\ \mu}\Lambda^\lambda_{\ \nu} = g_{\mu\nu}$ erfüllen.

a) Es seien $\Lambda^{\mu}_{1\ \nu}$ und $\Lambda^{\mu}_{2\ \nu}$ zwei Lorentz-Transformationen. Zeigen Sie, dass dann auch die Kombination $\Lambda^{\mu}_{3\ \nu} = \Lambda^{\mu}_{1\ \kappa}\Lambda^{\kappa}_{2\ \nu}$ eine Lorentz-Transformation ist.

b) Berechnen Sie die möglichen Werte für die Determinante von $\Lambda^\mu_{\ \nu}$.

c) Finden Sie eine Formel, welche die inverse Lorentz-Transformation $(\Lambda^{-1})^\mu_{\ \nu}$ durch Heben und Senken der Indizes mit $\Lambda^\mu_{\ \nu}$ verbindet.

d) Zeigen Sie, dass die Lorentz-Transformationen eine Gruppe bilden.

Aufgabe 35: Kovariante Formulierung der Maxwellgleichungen (schriftlich, 6 Punkte)

Analog zum Vierer-Ort und -Impuls definiert man die Vierer-Stromdichte $j^\nu = (c\rho, \mathbf{j})$ und das Vierer-Potential $A^\nu = (\Phi/c, \mathbf{A})$. Desweiteren führt man den antisymmetrischen Feldstärketensor $F^{\mu\nu}$ ein :

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass die zwei inhomogenen Maxwellgleichungen gegeben sind durch

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu.$$

b) Überprüfen Sie, dass die zwei homogenen Maxwellgleichungen enthalten sind in

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0.$$

Gehen Sie wie folgt vor :

i) Berechnen Sie $F_{\mu\nu}$ aus $F^{\mu\nu}$.

ii) Was passiert bei einer Permutation von μ, ν und λ?

iii) Überlegen Sie sich den Fall zweier gleicher Indizes, z.B. $\mu = \nu$.
Hinweis : $F^{\lambda\nu} = -F^{\nu\lambda}$

iv) Behandeln Sie explizit die übrigen 4 Fälle.

c) Zeigen Sie, dass der Feldstärketensor $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ invariant unter der Transformation

$$A^\nu \to A^\nu + \partial^\nu \Lambda$$

ist, wobei Λ eine beliebige stetig differenzierbare Funktion ist. Wie nennt man eine solche Eigenschaft/Transformation?

d) Berechnen Sie den Ausdruck $\partial_\mu j^\mu$. Schreiben Sie die entstehende Gleichung in die Darstellung mit ∇ und ∂_t um. Welcher physikalische Sachverhalt wird hiermit beschrieben?