



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik

Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 5

Ausgabe: 28.11.2022, Abgabe: 05.12.2022, Übungen: 08.12.2022

Aufgabe 16: Teilchenzahldarstellung (schriftlich, 5 Punkte)

Ein antisymmetrisierter fermionischer Basiszustand lässt sich ausdrücken als

$$|n_1, n_2, \dots\rangle = \left(\hat{a}_1^\dagger\right)^{n_1} \left(\hat{a}_2^\dagger\right)^{n_2} \dots |0\rangle \quad n_i \in \{0, 1\}.$$

Der Vakuumzustand $|0\rangle$ ist definiert durch $\hat{a}_i |0\rangle = 0$ ($\forall i$), wobei für die fermionischen Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren die folgenden Vertauschungsrelationen gelten:

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger\} = \delta_{ij}$$

und

$$\{\hat{a}_i, \hat{a}_j\} = \{\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger\} = 0$$

- Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen, dass $n_i \in \{0, 1\}$ ($\forall i$). Wie nennt man diese Eigenschaft?
- Der *Teilchenzahloperator* ist definiert durch $\hat{n}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$. Zeigen Sie mit Hilfe der Vertauschungsrelationen:

$$\begin{aligned} \hat{n}_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle &= n_i |n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\rangle \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j] &= -\hat{a}_j \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{a}_j^\dagger] &= \hat{a}_j^\dagger \delta_{ij} \\ [\hat{n}_i, \hat{n}_j] &= 0 \\ \hat{n}_i^2 &= \hat{n}_i \quad (\forall i) \end{aligned}$$

Aufgabe 17: Bosonisierung des Spins (schriftlich, 5 Punkte)

Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erfüllen die bosonischen Vertauschungsrelationen $[\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = [\hat{a}, \hat{a}] = 0$ und $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$.

a) Zeigen Sie, dass die Operatoren

$$\begin{aligned}\hat{L}_z &= \hbar(l - \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ \hat{L}_+ &= \hbar \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}} \hat{a} \\ \hat{L}_- &= \hbar \hat{a}^\dagger \sqrt{2l - \hat{a}^\dagger \hat{a}}\end{aligned}$$

die Drehimpulsalgebra in der Form $[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm \hbar \hat{L}_\pm$ und $[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar \hat{L}_z$ erfüllen.

b) Berechnen Sie $\hat{\mathbf{L}}^2$ und interpretieren Sie die Variable l .

c) *Physikalischer Kontext:* Angenommen, man würde einen Ferromagneten als großen Spin beschreiben. Welche Quasiteilchen würden dann von den Operatoren \hat{a}^\dagger und \hat{a} erzeugt/vernichtet? Erhöhen oder verringern diese Quasiteilchen die Magnetisierung?

Anmerkung: Diese Darstellung der Drehimpulsoperatoren geht auf T. Holstein und H. Primakoff zurück (Phys. Rev. **58**, 1098 (1940)).

Aufgabe 18: Wirkungsquerschnitt (mündlich)

Es sei bei reiner s -Streuung der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = a; \quad a > 0$$

gemessen worden. Bestimmen Sie die komplexe Streuamplitude $f(\vartheta)$.