



Höhere Quantentheorie und Elektrodynamik
Wintersemester 2022/23 - Übungsblatt 7

Ausgabe: 13.12.2022, Abgabe: 19.12.2022, Übungen: 22.01.2022

Aufgabe 22: Basiswechsel in zweiter Quantisierung
(schriftlich, 4 Punkte)

Die Einteilchen-Basiszustände $|\psi_\mu\rangle$ gehen durch eine lineare unitäre Transformation in die neuen Basiszustände $|\tilde{\psi}_\nu\rangle$ (jeweils Orthonormalbasen) über

$$|\tilde{\psi}_\nu\rangle = \sum_\mu |\psi_\mu\rangle \langle \psi_\mu | \tilde{\psi}_\nu\rangle.$$

Die Transformationsregeln für die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren \hat{a}_μ^\dagger und \hat{a}_μ der Einteilchen-Zustände $|\psi_\mu\rangle$ sind analog:

$$\hat{b}_\nu^\dagger = \sum_\mu \langle \tilde{\psi}_\nu | \psi_\mu\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger, \quad \hat{b}_\nu = \sum_\mu \langle \tilde{\psi}_\nu | \psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu.$$

- a) Zeigen Sie, dass \hat{b}_ν^\dagger und \hat{b}_ν die gleichen (Anti-)Kommutatorrelationen für Fermionen/Bosonen erfüllen, wie \hat{a}_μ^\dagger und \hat{a}_μ .
- b) Beweisen Sie, dass die Zahl der Teilchen (wie alle messbaren Grössen) invariant unter einer Basistransformation ist, also, dass gilt

$$\sum_\nu \hat{b}_\nu^\dagger \hat{b}_\nu = \sum_\mu \hat{a}_\mu^\dagger \hat{a}_\mu.$$

- c) Wichtiger Spezialfall: *Feldoperatoren*

Die sogenannten Feldoperatoren $\hat{\psi}^\dagger(x)$ und $\hat{\psi}(x)$, die ein Teilchen am (eindimensionalen) Ort erzeugen bzw. vernichten, sind gegeben durch die Basistransformation

$$\hat{\psi}^\dagger(x) = \sum_\mu \langle x | \psi_\mu\rangle^* \hat{a}_\mu^\dagger = \sum_\mu \phi_\mu^*(x) \hat{a}_\mu^\dagger, \quad \hat{\psi}(x) = \sum_\mu \langle x | \psi_\mu\rangle \hat{a}_\mu = \sum_\mu \phi_\mu(x) \hat{a}_\mu.$$

Die Koeffizienten $\phi_\mu(x)$ sind die bekannten Wellenfunktionen des entsprechenden Zustandes $|\psi_\mu\rangle$ in der Ortsdarstellung.

Zeigen Sie, dass die Vertauschungsrelationen fermionischer Feldoperatoren gegeben sind durch

$$\{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')\} = \{\hat{\psi}^\dagger(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\} = 0, \quad \{\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x')\} = \delta(x - x')$$

und analog für bosonische Feldoperatoren.

Aufgabe 23: Feldoperatoren und Hamilton-Operator (schriftlich, 6 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die kinetische Energie durch die Feldoperatoren als

$$T = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \right) \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

dargestellt werden kann.

Hinweis: Beginnen Sie mit der Darstellung $T = \sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j$, wobei $t_{ij} = \langle i | -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta | j \rangle$. Schreiben Sie t_{ij} mit Hilfe der Einteilchenwellenfunktionen in der Ortsdarstellung auf. Drücken Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren durch die Feldoperatoren und die Einteilchenwellenfunktionen aus. Passen Sie bei Integration und Summation auf die Reihenfolge von Operatoren und Funktionen auf.

b) Wann darf T in die Form

$$T = \int d^3r \frac{\hbar^2}{2m} \nabla \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \nabla \hat{\psi}(\mathbf{r})$$

gebracht werden?

c) Leiten Sie aus der folgenden *Heisenbergschen Bewegungsgleichung* für die *zeitabhängigen Feldoperatoren* $\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t)$ und $\hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}, t)$,

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = [\hat{\Psi}(\mathbf{r}, t), H],$$

wobei

$$H = \int d^3r \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3r \int d^3r' \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}) \hat{\psi}^\dagger(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}') \hat{\psi}(\mathbf{r}),$$

$V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = V(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ und $\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t=0)$, die *Feldgleichung* her:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + U(\mathbf{r}) \right) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t) + \int d^3r' \hat{\Psi}^\dagger(\mathbf{r}', t) V(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \hat{\Psi}(\mathbf{r}', t) \hat{\Psi}(\mathbf{r}, t).$$

Aufgabe 24: Ideales Fermigas (mündlich)

Wir betrachten ein System von vielen schwach gebundenen Elektronen in einem endlichen zwei-dimensionalen Kasten der Fläche S . In der Sommerfeld-Theorie idealisiert man das System und betrachtet freie, nicht wechselwirkende Elektronen mit dem folgenden Hamilton-Operator:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, \sigma} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Zustand

$$|\varphi_0\rangle = \prod_{\mathbf{k}, k \leq k_F} \prod_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \hat{c}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger |0\rangle$$

der Grundzustand von \mathcal{H}_0 ist.

b) Bestimmen Sie den grösstmöglichen Wellenvektor des Grundzustandes k_F als Funktion der Teilchendichte $n_{2D} = N/S$, wobei N die Anzahl von Elektronen ist.

c) Berechnen Sie nun noch die Grundzustandsenergie E_0 als Funktion von N und der Fermienergie $\epsilon_F = \hbar^2 k_F^2 / 2m$.