2.4 Kovarianter vierdim. Formalismus

(i) Lorentz-Skalare: $c, m, x^2 = x_\mu x^\mu$

(ii) kontravariante Vierervektoren: a^μ

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$

(iii) kovariante —— " —— : a_μ

$$a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu$$

$$a'_\mu = \Lambda_\mu{}^\nu a_\nu$$

$x^2 = x^\mu x_\mu$ invariant, Skalar

(iv) kontravarianter Tensor k-ter Stufe: Spezialfall: $k=1$ kontrav. Vierervektor

$$T'^{\mu_1 \cdots \mu_k} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\nu_1} \Lambda^{\mu_2}{}_{\nu_2} \cdots \Lambda^{\mu_k}{}_{\nu_k} T^{\nu_1 \cdots \nu_k}$$

(v) kovarianter Tensor k-ter Stufe:

$$T'_{\mu_1 \dots \mu_k} = \Lambda_{\mu_1}{}^{\nu_1} \Lambda_{\mu_2}{}^{\nu_2} \dots \Lambda_{\mu_k}{}^{\nu_k} \; T_{\nu_1 \dots \nu_k}$$

(vi) gemischter Tensor (k-fach kovariant, l-fach kontravariant)

$$T'^{\mu_1 \dots \mu_l}{}_{\nu_1 \dots \nu_k} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\sigma_1} \dots \Lambda^{\mu_l}{}_{\sigma_l} \Lambda_{\nu_1}{}^{\rho_1} \dots \Lambda_{\nu_k}{}^{\rho_k} \, T^{\sigma_1 \dots \sigma_l}{}_{\rho_1 \dots \rho_k}$$

(vii) inverse LT:

$$\Lambda^{-1} = g \Lambda^T g$$

ziehe "σ" hoch

ziehe "ρ" hinunter

$$\boxed{(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu} = g^{\mu\sigma} (\Lambda^T)_\sigma{}^\rho \, g_{\rho\nu} = g^{\mu\sigma} \Lambda^\rho{}_\sigma \, g_{\rho\nu} = \boxed{\Lambda_\nu{}^\mu} \quad (25)$$

$$x^\mu = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu x'^\nu = \Lambda_\nu{}^\mu x^\nu$$

Metrischer Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} = g^{\mu\nu} = g^\mu{}_\nu = g_\mu{}^\nu$$

(viii) Ableitungen: – nach Skalar: Transformationseigenschaft ändert sich nicht

– nach kontravarianten Vektor: betrachte Funktion

$$f = f(x^\mu) = f(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

LT: $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu$

inverse LT: $\boxed{x^\mu = \Lambda_\nu{}^\mu \, x'^\nu} = \sum_{\sigma=0}^{3} \Lambda_\sigma{}^\mu x'^\sigma = \Lambda_0{}^\mu x'^0 + \Lambda_1{}^\mu x'^1 + \dots$

$$f(x^\mu) = f(x^\mu(x'^\nu))$$

Ableitungen nach x'^μ: Kettenregel der Ableitung

$$\partial'_\nu = \frac{\partial f}{\partial x'^\nu} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x^\mu}}_{\partial_\mu} \underbrace{\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}}_{= \Lambda_\nu{}^\mu}$$

Bsp.: $f(t, x) = f(t(x'), x(x'))$

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'}$$

vergleiche: $x'^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu \, x^\mu$, $\quad x'_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu \, x_\mu$

d.h.: Ableitung nach kontravarianten Vektor transformiert sich wie kovarianter Vektor, und umgekehrt.

schreiben:
$$\partial_\mu := \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \vec{\nabla}\right) = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\partial^\mu := \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right) = g^{\mu\nu}\partial_\nu$$

(ix) Tensorprodukt: erzeuge Tensoren höherer Stufe, z.B.

$$T^\nu{}_\mu = a^\nu b_\mu$$

kovarianter 4-Vektor

gem. Tensor 2-Stufe (1-fach kov., 1-fach kontrav.)

kontravarianter 4-Vektor

allgemein:

$$T^{\mu_1 \dots \mu_{k+k'}}{}_{\nu_1 \dots \nu_{l+l'}} = R^{\mu_1 \dots \mu_k}{}_{\nu_1 \dots \nu_l} \, S^{\mu_{k+1} \dots \mu_{k+k'}}{}_{\nu_{l+1} \dots \nu_{l+l'}}$$

gem. Tensor $(k+k')$-fach kontrav., $(l+l')$-fach kovariant

(x) Skalarprodukt: erzeuge Skalar aus Vektoren

$$a_\nu b^\nu = a_0 b^0 + a_1 b^1 + a_2 b^2 + a_3 b^3$$

Beweis, dass Skalar: selber, $a_\mu{}' b^{\mu}{}' = a_\nu b^\nu$

(xi) allgemeiner: Verjüngung von Tensoren (Kontraktion) erniedrigt die Stufe.

Bsp.: Skalarprodukt: $a_\nu b^\mu$, dann $\mu = \nu$

$$T^{\mu_1 \cdots \overset{i}{\sigma} \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \underset{j}{\sigma} \cdots \nu_\ell} = \tilde{T}^{\mu_1 \cdots \mu_{k-1}}{}_{\nu_1 \cdots \nu_{\ell-1}}$$

Tensor $(k+\ell)$-ter Stufe $\longrightarrow$ Tensor $(k+\ell-2)$-ter Stufe

Bsp.: Spurbildung bei Matrizen

(xii) $$\partial_\mu \partial^\mu = \partial^\mu \partial_\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \underset{\substack{\shortparallel \\ \Delta \\ \text{Laplace-Op.}}}{\nabla^2}$$

$$=: \Box \quad : \text{d'Alembert-Operator}$$

Box-Operator

$\Box$ ist Lorentz-Skalar, d.h. ändert sich <u>nicht</u> bei LT.

Wellengleichung: $\Box E_x(\vec{r}, t) = 0$, ...

2.5 Relativistische Mechanik

Ziel: eine unter LT forminvariante (kovariante) Formulierung der klassischen Mechanik.

Problem: · betrachte $\vec{F} = m \dfrac{d^2\vec{x}}{dt^2}$

Raumkomp. eines 4-Vektors

Ableitung nach t (kein Skalar)

· benötige zur Beschreibung der Bewegung eines Körpers Ableitungen nach der Zeit t: Geschwindigkeit, Beschleunigung.

· Zeit ist kein Lorentz-Skalar, d.h.

$$x = (ct, \vec{r})$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(c, \frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$ ist kein Lorentz-Vierervektor

Lösung: verwende statt t einen Lorentzskalar zur Parametrisierung der Bahn / Dynamik, nämlich <u>Eigenzeit</u> τ:

$$x^2 = x_\mu x^\mu \qquad \text{Skalar}$$

infinitesimales Intervall in Raumzeit:

$$dx = (c\,dt, d\vec{r}) \qquad \text{Vierervektor}$$

$$dx^2 = dx_\mu dx^\mu \qquad \text{ebenfalls Skalar}$$

<u>Definition</u>: Eigenzeit

$$\boxed{d\tau^2 := \frac{dx^2}{c^2} = dt^2 - \frac{1}{c^2} dr^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \qquad (26)}$$

Physikalische Bedeutung: τ ist die Zeit im mitbewegten

KS eines Objekts / Körpers.
(Zeit im Ruhesystem des Körpers)

Zusammenhang Eigenzeit – Koordinatenzeit:

Geschwindigkeit: $$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$v^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

$$= \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{dt^2}$$

in (26): $$d\tau^2 = dt^2 - \frac{v^2}{c^2} dt^2 = \underbrace{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}_{= 1/\gamma^2} dt^2$$

$$\boxed{d\tau^2 = \frac{1}{\gamma^2} dt^2}$$

$v = \text{const.} \Rightarrow \boxed{t = \gamma \tau}$ (27)

Vierergeschwindigkeit :

$$u^\mu := \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(ct, \vec{r}) = \left(c\gamma, \gamma \frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \gamma(c, \vec{v}) \qquad (28)$$

$= \gamma \frac{d}{dt}$

$$\Rightarrow u^2 = u_\mu u^\mu = \gamma^2(c^2 - v^2) = c^2 \cancel{\gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)} = c^2$$

Vierer-Beschleunigung:

$$\boxed{m \frac{du^\mu}{d\tau} =: K^\mu}$$

(29)

Minkowski-Kraft
(Vierervektor)

nicht-relativistischer Grenzfall:

$v \ll c$

$\gamma \to 1 \, , \quad \tau \to t$

$u^\mu \to (c, \vec{v})$

$\to$ 2. Newtonsches Gesetz ✓

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\Rightarrow \quad K^\mu = (0, \vec{F})$$

nicht-rel. Kraft (Newton)

ausserdem: $\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p}$

Impuls

Raumkomponenten von (29): $i = 1,2,3 = x,y,z$

$$K^i = m\frac{d}{d\tau}\gamma v^i = m\underbrace{\gamma\frac{d}{dt}}_{\frac{d}{d\tau}}\gamma v^i = \gamma\frac{d}{dt}p^i = \gamma F^i$$

Vierer-Impuls:

$$p^\mu = m u^\mu = m\gamma(c,\vec{v})$$

0-Komponente K^0: Kontraktion mit u^μ (Skalarprod.)

$$m u_\mu \frac{du^\mu}{d\tau} = u_\mu K^\mu$$

$$\frac{1}{2} m \frac{d}{d\tau}\big(\underbrace{u_\mu u^\mu}_{=c^2}\big) = 0$$

$$u_\mu K^\mu = u_0 K^0 - \gamma^2 \vec{v}\cdot\vec{F}$$

$$\Rightarrow K^0 = \gamma^{\cancel{2}}\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{\cancel{\gamma}c} \Rightarrow K^0 = \gamma\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{c}$$

Zusammen:

$$\boxed{K^\mu = \gamma\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{F}\right)} \quad (30)$$

Vierer-Impuls:

$$\boxed{p^\mu := m u^\mu = m\gamma\,(c, \vec{v})} \quad (31)$$

Null-Komponente:

$$c p^0 = m\gamma c^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Taylor-Entwicklung für $v \ll c$, d.h. $\frac{v}{c} \ll 1$:

$$c p^0 = mc^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$

$$\approx mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^4} + \cdots\right)$$

$$x = \frac{v^2}{c^2}$$

$$\approx \underbrace{mc^2}_{\text{Ruhe-energie}} + \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\substack{\text{kinetische Energie}\\ \text{(nicht-rel.)}}} + \underbrace{\frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2}}_{\text{erste relativ. Korrektur}} + \underbrace{\cdots}_{\text{höhere Korrekturen}} \qquad (32)$$

$$\Rightarrow \quad p^0 = \frac{E}{c} \quad \text{wobei} \quad E = \text{Energie} \qquad (33)$$

Bemerkungen:

1) m = Ruhemasse : Lorentz-Skalar
γm = "relativistische Masse" : kein Lorentz-Skalar

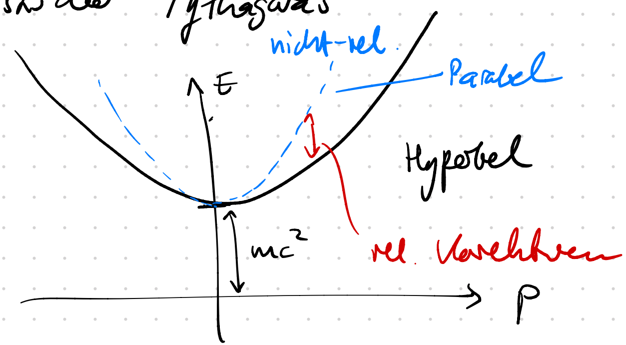
2) $p^\mu = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$ mit $\vec{p} = m\gamma\vec{v}$
$E = m\gamma c^2$

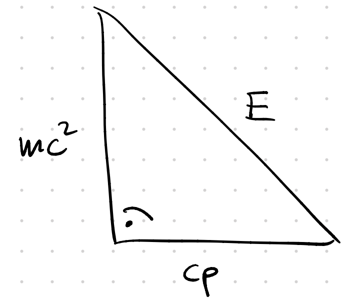
Quadriere: $\quad p^2 = p_\mu p^\mu = (p^0)^2 - \vec{p}^{\,2} = \boxed{\frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2}}$

$\quad = m^2 u_\mu u^\mu = \boxed{m^2 c^2}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 \vec{p}^{\,2}}} \qquad (34)$$

"relativistischer Pythagoras"





Teilchen in Ruhe: $\vec{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = mc^2}$ Ruheenergie

Bewegungsgleichung (29) :

$$\boxed{\frac{d}{d\tau} p^\mu = K^\mu} \qquad (35)$$

<u>Bem:</u>

1) $\vec{F} = 0 \Rightarrow K^\mu = 0 \Rightarrow p^\mu$ <u>erhalten</u> (Energie + Impuls)

2) Drehimpuls → Übungen

3) Raumkomponenten von (35) $\times \frac{1}{\gamma}$:

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F}$$

fast 2. Newton'sches Gesetz, aber $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$

deswegen gilt $m\ddot{\vec{r}} \neq \vec{F}$ <u>nicht</u>

2.6 Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

- Maxwell-Gln. sind bereits kovariant
- hier: manifest kovariante Notation
- empirische Tatsache: Ladung q eines Teilchens ist Lorentz-invariant.

Ladungsdichte: Ladung dq pro Volumen dV

Lorentzkontraktion: $dV = dV_0 / \gamma$

Volumen im Ruhesystem der Ladung

$$\Rightarrow \quad \rho = \frac{dq}{dV} = \gamma \frac{dq}{dV_0} = \gamma \rho_0$$

Ladungsdichte im Ruhesystem (Lorentz-Skalar)

Vierer-Stromdichte:

elektrische Stromdichte

$$\boxed{j^\mu := (c\rho, \vec{j}) = (c\rho, \vec{v}\rho) = \underbrace{\overbrace{\rho_0 \gamma}^{=\rho} (c, \vec{v})}_{= u^\mu} = \rho_0 u^\mu} \quad (36)$$

Kontinuitätsgleichung: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \iff \boxed{\partial_\mu j^\mu = 0}$ (37)

$\partial_\mu = \left(\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, +\vec{\nabla}\right)$.

Felder?

Lorentzkraft: $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right)$

(wirkt auf geladenes Teilchen)

dazu gehörige Minkowski-Kraft:

$$K^\mu = \gamma\left(\frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c}, \vec{F}\right) = q\gamma\left(\frac{\vec{E}}{c}\cdot\vec{v}, \frac{\vec{E}}{c}c + \vec{v}\times\vec{B}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$= q\, F^{\mu\nu} u_\nu$$

z.B. $K^0 = q\left(F^{00} u_0 + F^{01} u_1 + \dots\right)$

$= -\frac{\vec{E}}{c}$

lese Koeffizienten ab:

$$F^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & -\frac{E_x}{c} & -\frac{E_y}{c} & -\frac{E_z}{c} \\ \hline \frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ \frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -B_x \\ \frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{array}\right) \tag{38}$$

Bem.:

1) $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ antisymmetrischer Tensor 2. Stufe

2) $F^{\mu\nu}$ heisst Feldstärketensor

3) Transformationsverhalten unter LT:

$$(F')^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\sigma \Lambda^\nu{}_\rho F^{\sigma\rho} \tag{39}$$

(Einsteinsche Summenkonvention: $\sum_{\sigma,\rho=0}^{3}$

z.B.: LT entlang x mit $\beta = \frac{v}{c}$:

$$B_x' = \gamma \left(B_x + \frac{\beta}{c} E_y \right)$$
$$E_x' = \gamma \left(E_x - \beta c B_y \right)$$

d.h.: • elektrisches und magnetisches Feld sind nicht unabhängige Grössen, sondern Komponenten <u>einer</u> Grösse.

• $\vec{E}$ und $\vec{B}$ gehen bei LT ineinander über

Maxwell – Gleichungen (MG)

inhomogene MG: $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, $\vec{\nabla}\times\vec{B} - \varepsilon_0\mu_0 \dot{\vec{E}} = \mu_0 \vec{j}$

$$\boxed{\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu} \qquad (40)$$

Komponenten: $\nu = 0 \Rightarrow \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$; $\nu = 1,2,3$: Ampère – Maxwell

homogene MG: $$\boxed{\partial^\mu F^{\nu\sigma} + \partial^\nu F^{\sigma\mu} + \partial^\sigma F^{\mu\nu} = 0} \qquad (41)$$

eleganter: <u>dualer Feldstärketensor</u>

$$\boxed{\tilde{F}^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}} \qquad (42)$$

antisymmetrischer Tensor 4. Stufe:

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} := \begin{cases} +1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma = 0123 \text{ oder zyklisch,} \\ -1 & \text{falls } \mu\nu\rho\sigma = 3210 \text{ — " —,} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

damit: homogene MG: $\boxed{\partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} \stackrel{!}{=} 0}$ (43)

Übung: Komponenten von $\tilde{F}^{\mu\nu}$ berechnen.

Dualität: Rollen von $\vec{E}$ und $\vec{B}$ vertauscht, genauer:

$$\vec{B} \longleftrightarrow -\frac{\vec{E}}{c} \quad \text{bei} \quad F \longleftrightarrow \tilde{F}$$

Maxwell-Gleichungen:

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \mu_0 j^\nu \\ \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} &= 0 \end{aligned}}$$

Invarianten des e.m. Feldes:

- $$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = 2\left(\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{E}^2\right)$$

  $\rightarrow$ können $\vec{E}$ nicht vollst. in $\vec{B}$ umwandeln durch LT, und umgekehrt

  $$F_{\mu\nu} \tilde{F}^{\mu\nu} = -\frac{4}{c}\vec{E}\cdot\vec{B}$$

Potentiale

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$, $\vec{A}$ = Vektorpotential

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \dot{\vec{A}}$$, ϕ = skalares Potential

- Damit sind homogene MG „gelöst"
- Eichfreiheit

z.B.: $B_x = F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2$
$= \partial^y A^z - \partial^z A^y$

<u>Def.:</u> Viererpotential $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right)$

Coulomb-Eichung: $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ (nicht kovariant)

Lorenz-Eichung: $\partial_\mu A^\mu = 0$ (kovariant)

Drücke $F^{\mu\nu}$ durch A^μ aus: $\boxed{F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu}$ (44)

Drücke inhomogenen MG durch Potentiale aus:

(44) in (40) $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$

$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu = \mu_0 j^\nu$

$$= \Box \qquad\qquad \underbrace{\qquad}_{=0}$$

im Lorenz-Eichg

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Box A^\nu = \mu_0 j^\nu} \quad \text{Wellengleichg}$$

ohne Quellen: $j^\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Box A^\nu = 0}$ (45)

Elektromagnetische Energiedichte

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{1}{c^2} E^2 + B^2 \right)$$

Nicht Lorentz-invariant, sondern 00-Komponente eines (Vierer-) Tensors 2-ter Stufe.

$$T^{\mu\lambda} = -\frac{1}{\mu_0}\left(g_{\nu\alpha} F^{\mu\alpha} F^{\lambda\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\lambda} F_{\nu\alpha} F^{\nu\alpha}\right)$$

$$T^{00} = u$$

$$T^{0j} = T^{j0} = -\frac{1}{c\mu_0}\left(\vec{B} \times \vec{E}\right)^j$$: Poynting-Vektor

T^{ij} = Maxwellscher Spannungstensor
(Druck des e.m. Feldes)