Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`www.tinyurl.com/2021ik3`

Übungsblatt 4

(Abgabe am 24.11.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 25.11.21 oder 26.11.21)

Aufgabe 10: Fouriertransformation der Gaußfunktion (6 Punkte)

Berechnen Sie die Fouriertransformation der eindimensionalen Gaußfunktion

$$g(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

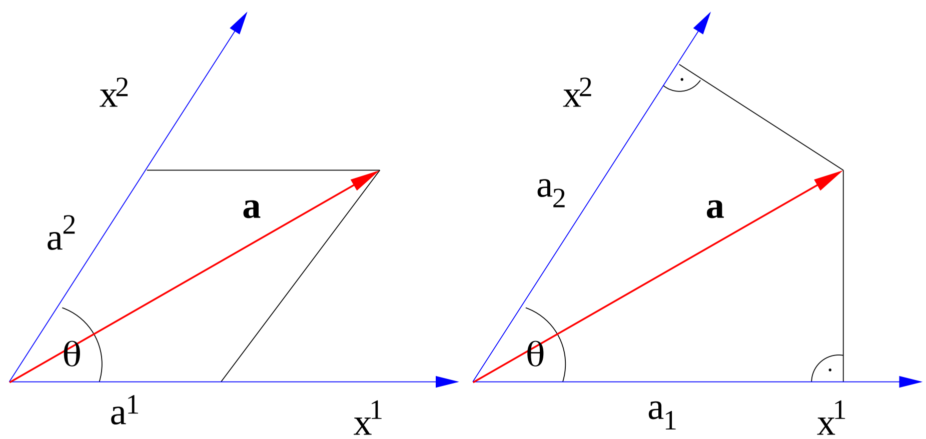
Skizzieren Sie die Gaußfunktion (im Ortsraum) und ihre Fouriertransformierte (im k-Raum).
Hinweise: Verwenden Sie eine quadratische Ergänzung im Exponenten und geeignete Substitutionen, um das Problem auf das Gaußintegral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$$

zurückzuführen.

Aufgabe 11: Tensorrechnung (4 Kreuze)

Anhand eines schiefwinkligen Koordinatensystems lassen sich wichtige Begriffe der Tensorrechnung verstehen. Betrachten Sie dazu das schiefwinkligen Koordinatensystem in den folgenden Abbildungen. Es gibt hier zwei Möglichkeiten, wie man die Koordinaten eines Vektors angeben kann.



a) Berechnen Sie die sog. kontravarianten Komponenten a^1 und a^2 (Index oben) und die sog. kovarianten Komponenten a_1 und a_2 (Index unten) des Vektors $\boldsymbol{a}$ aus den kartesischen Komponenten $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

b) Bestimmen Sie die Basis $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ aus den Richtungen der Achsen x^1 und x^2.

c) Zeigen Sie, dass gilt $\boldsymbol{a} = \sum_i a^i \boldsymbol{e}_i = a^i \boldsymbol{e}_i$ (mit Einsteinscher Summenkonvention[1]).

[1] *Einstein-Summenkonvention* : Über zwei gleiche (ein oberer und ein unterer) Indizes wird summiert. Falls gleiche Indizes oben oder unten auftauchen, dann hat man wahrscheinlich etwas falsch gemacht ☹.

d) Die Komponenten a^1 und a^2 von $\boldsymbol{a}$ werden kontravariant genannt, da sie sich bei Basiswechsel entgegen der Basis transformieren. Betrachten Sie dazu eine Drehung um den Winkel $\pi/2$ und zeigen Sie, dass der umgekehrt gedrehte Vektor $\boldsymbol{a}'$ eingesetzt in die Komponenten a^1 und a^2 die Komponenten a'^1 und a'^2 in der gedrehten Basis (wie lautet diese?) ergibt, dass also gilt $\boldsymbol{a} = a'^i \boldsymbol{e}'_i$.

e) Die Länge von $\boldsymbol{a}$ ist ein sog. Skalar (Tensor 0.ter Stufe) und natürlich basisunabhängig. Er berechnet sich aus dem Skalarprodukt (inneres Produkt) $l^2 = a_i a^i = \boldsymbol{a}^T \cdot \boldsymbol{a}$. Bestimmen Sie damit l. Hier wird also über den selben Index i (oben und unten) summiert und der Vektor (Tensor 1. Stufe) zu einem Skalar verjüngt.

f) Mit Hilfe des metrischen Tensors $g_{ij} = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j$ (Tensor 2.ter Stufe) lassen sich die kontravarianten Komponenten in kovariante Umrechnen: $a_i = g_{ij} a^j$. Man kann also damit den Index "herunterziehen". Wie lautet hier der metrischen Tensors g_{ij}? Bestätigen Sie damit die Umrechung der Komponenten.

g) Analog lässt sich mittels $\boldsymbol{e}^i = g^{ij} \boldsymbol{e}_j$ die sog. duale Basis berechnen. g^{ij} ist der (zweifach kontravariante) metrische Tensor für den gilt $g_{ij} g^{jk} = \delta_i^k$. Bestimmen Sie g^{jk} und damit die duale Basis. Zeigen Sie dann, dass damit auch gilt $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}^j = \delta_i^j$ und $\boldsymbol{a} = a_i \boldsymbol{e}^i$.

h) Kombiniert man zwei Vektoren mittels eines Tensorproduktes (äußeres Produkt) $T^i{}_j = a^i b_j = \boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b}$ erhält man einen Tensor zweiter Stufe. Berechnen Sie $a^i a_j$.

Aufgabe 12: Kovarianter vierdimensionaler Formalismus **(4 Kreuze)**

In der Speziellen Relativitätstheorie fasst man die Zeit- und Raumvariablen zu einem Viererortsvektor[2] $x^\nu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} = (ct, \mathbf{x})^{\mathrm{T}}$ und Energie und Impuls zum Viererimpuls $p^\nu = (p^0 = E/c, \mathbf{p})^{\mathrm{T}}$ zusammen.
Der metrische Tensor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

überführt einen kontravarianten Vierervektor $a^\nu = (a^0, \boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}$ in den kovarianten Vierervektor $a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu = (a^0, -\boldsymbol{a})$, also auf gut deutsch: $g_{\mu\nu}$ zieht den Summationsindex runter und $g^{\mu\nu}$ zieht ihn hoch.

a) Berechnen Sie $x_\nu x^\nu$ und $p_\nu p^\nu$ und zeigen Sie, dass $x^\mu x_\mu = x_\nu x^\nu$.

b) Welche Komponenten unterscheiden sich bei einem Tensor zweiter Stufe $G_{\mu\nu}$ von dem Tensor $G^{\mu\nu}$? Was bedeutet dies insbesondere für die metrischen Tensoren $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$?

c) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt $a_\nu b^\nu$ invariant unter Lorentztransformation ist.

d) Man definiert den kovarianten Gradientenvektor

$$\partial_\nu = \frac{\partial}{\partial x^\nu} = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Wie lautet also der kontravariante Gradientenvektor $\partial^\nu = \frac{\partial}{\partial x_\nu}$? Berechnen Sie damit $\partial_\mu \partial^\mu$, den sog. d'Alembert Operator. Zeigen Sie, dass sich ∂_ν wie ein kovarianter Vektor transformiert.

Hinweis: Leiten Sie eine beliebige Funktion $f(x^\mu)$ mit der Kettenregel ab und verwenden Sie $\Lambda_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}$.

[2] Lateinische Indizes laufen von 1 bis 3, d. h. $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$. Griechische Indizes von 0 bis 3, z. B. $x = x^\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3)^{\mathrm{T}} = (x^0, \mathbf{x})^{\mathrm{T}}$.