

Übungsblatt 5

(Abgabe am 01.12.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 02.12.21 oder 03.12.21)

Aufgabe 13: Relativistische Teilchenkollision

(6 Punkte)

Wir betrachten die elastische Kollision von zwei Teilchen der Ruhemasse m . Nehmen Sie dabei an, dass das zweite Teilchen im Laborsystem ruht. Wir bezeichnen die Viererimpulse der Teilchen vor dem Stoß mit $p_1^\mu = (E_1/c, \mathbf{p}_1)$ und $p_2^\mu = (E_2/c, \mathbf{p}_2)$. Als Raumkomponenten bezeichnen wir \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 .

- Geben Sie zunächst allgemein eine geeignete Transformation Λ^ν_μ an, um den Vierervektor $p^\mu = (E/c, \mathbf{p})$ in einem Bezugssystem mit Geschwindigkeit $\mathbf{v} = v\hat{z}$ darzustellen. Wie sieht $p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ aus?
 - Im Laborsystem soll sich (vor dem Stoß) das einfallende Teilchen in z -Richtung bewegen, während das zweite Teilchen ruht. Wie sehen die entsprechenden Viererimpulse $p_1'^\mu$ und $p_2'^\mu$ aus? Im Schwerpunktsystem soll die Raumkomponente des Gesamtimpulses $p'^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu$ gerade null sein. Welcher Zusammenhang zwischen der Gesamtenergie $E = E_1 + E_2$ und p_1 folgt damit? Mit welchem Faktor hängen die Energien E und E' in Laborsystem und Schwerpunktsystem zusammen?
- Die Kollision im Schwerpunktsystem ist in der Abbildung schematisch dargestellt.

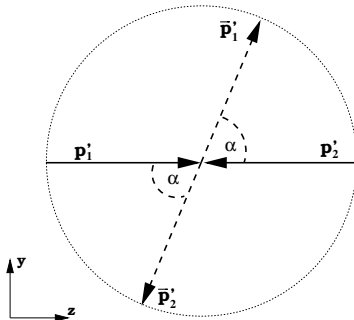


Abbildung: Teilchen mit den Raumkomponenten \mathbf{p}_1 und \mathbf{p}_2 kollidieren im Schwerpunktsystem. Das Ergebnis des Stoßes ist durch $\bar{\mathbf{p}}_1$ und $\bar{\mathbf{p}}_2$ dargestellt.

- Welches Bild ergibt sich im Laborsystem? Dort bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Raumvektor $\bar{\mathbf{p}}_1$ des ersten Teilchens (nach der Kollision) und der z -Achse mit ϑ . Ist ϑ größer oder kleiner als der entsprechende Winkel α im Laborsystem? Warum?
- Finden Sie nun die Transformation aus dem Schwerpunktsystem zurück ins Laborsystem. Nutzen Sie diese, um den folgenden Ausdruck herzuleiten:

$$\tan \vartheta = \frac{|\bar{\mathbf{p}}_1| \sin \alpha}{\gamma |\bar{\mathbf{p}}_1| \cos \alpha + \beta \gamma \bar{E}_1 / c}$$

- Verwenden Sie die in Teil (a) gefundenen Eigenschaften der Transformation ins Schwerpunktsystem, um die folgenden Transformationsgleichungen aufzustellen. Welche Bedeutung hat M ?

$$p_1^z = \frac{m}{M} p_1^{\tilde{z}}$$

Hinweis: Sie benötigen dazu unter anderem den Zusammenhang zwischen β und p_1^z , E und E' , und E und E_1 .

- Zeigen Sie nun mithilfe des Energie- und Impulssatzes den folgenden Ausdruck des Winkels ϑ als Funktion von α :

$$\vartheta(\alpha) = \arctan \left(\frac{\sin \alpha}{\gamma (\cos \alpha + 1)} \right)$$

Hinweis: Begründen und verwenden Sie, dass im Schwerpunktsystem $|\mathbf{p}'_1| = |\bar{\mathbf{p}}'_1|$ und $E'_1 = \bar{E}_1$ gilt.

- c) Betrachten Sie den klassischen ($v \ll c$) und ultrarelativistischen ($v \approx c$) Grenzfall. Skizzieren und interpretieren Sie die Abhängigkeit des Winkels ϑ von α .

Aufgabe 14: Dopplereffekt

(4 Kreuze)

a) *Nicht-relativistisch, ruhende Quelle, bewegter Beobachter.* Im ruhenden System sei eine Welle durch $e^{2\pi i(f t - x/\lambda)}$ beschrieben ($c = f\lambda$). Wie wird die Welle in einem System beschrieben, das sich mit der Geschwindigkeit v von der Quelle entfernt (Galilei-Transformation)? Welche Frequenz sieht der bewegte Beobachter? Ändert sich die Wellenlänge und die gesehene Ausbreitungsgeschwindigkeit?

b) *Nicht-relativistisch, bewegte Quelle, ruhender Beobachter.* Argumentieren Sie hier anschaulich anhand einer Skizze mit den Wegen, die aufeinanderfolgende Wellenberge zu durchlaufen haben um den Beobachter zu erreichen, dass dieser eine vergrößerte Wellenlänge und folglich verkleinerte Frequenz sieht, wenn sich die Quelle mit v von ihm wegbewegt. Geben Sie Formeln an.

Warum ist das Ergebnis für die Frequenzänderung nicht identisch zu a)?

c) Geschwindigkeitskontrollen im Straßenverkehr werden mit Radar durchgeführt. Das Radar-Verfahren stellt einen Spezialfall des Dopplereffekts dar. Obwohl Sender und Empfänger in Ruhe sind, tritt zwischen dem abgestrahlten und dem von einem sich mit der Geschwindigkeit v bewegenden Objekt reflektierten Signal eine Frequenzverschiebung auf. Wie berechnen Sie diese mithilfe der Ergebnisse aus a) und b)?

Die Verkehrskontrolle benutzt eine Mikrowellenstrahlung von $f=30$ GHz. Geben Sie an, welche maximale Frequenzverschiebung gemessen werden sollte, wenn sich alle Verkehrsteilnehmer an eine Geschwindigkeitsbegrenzung von 80 km/h halten.

d) *Relativistisch.* Gehen Sie wieder von einer in einem Inertialsystem als $e^{2\pi i f(t-x/c)}$ gegebenen Welle aus. Drücken Sie diese mit x' und t' , den Koordinaten eines relativ dazu mit Geschwindigkeit v bewegten Systems aus, die Sie mithilfe einer Lorentztransformation erhalten. Was gilt für Frequenz und Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im gestrichenen System?

e) Auch für ein quer zum Beobachter bewegtes Objekt tritt aufgrund der Zeitdilatation ein sog. transversaler Dopplereffekt auf. Geben Sie die Formel der veränderten Frequenz an und diskutieren sie, wann dieser Effekt relevant wird und vergleichen Sie die Frequenzänderung mit dem normalen Dopplereffekt.