Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
www.tinyurl.com/2021ik3

Universität Konstanz

Übungsblatt 6

(Abgabe am 08.12.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 09.12.21 oder 10.12.21)

Aufgabe 15: Lorentzinvariante Schreibweise der Elektrodynamik **(5 Kreuze)**

Aus dem kovarianten Viererpotential $A_\mu = (\Phi/c, -\boldsymbol{A})$ gewinnt man den elektromagnetischen Feldstärketensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}$$

sowie den dualen Tensor ($\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der Epsilon-Tensor)

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & B_x & B_y & B_z \\ -B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ -B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ -B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie die folgenden Feldinvarianten (Lorentzskalare) durch $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ aus.

   i) $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$
   ii) $F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$
   iii) $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$

b) In Abwesenheit von Ladungen lauten die Maxwellgleichungen

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0.$$

   i) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für das Vektorpotential $A_\mu(x)$ auf.
   Hinweis: Verwenden Sie den d'Alembert-Operator $\Box = \partial_\mu\partial^\mu$.
   ii) Wie vereinfacht sich die Bewegungsgleichung bei *Lorenz-Eichung* $\partial_\mu A^\mu = 0$?
   iii) Lösen sie die Bewegungsgleichung aus ii) mit dem Ansatz $A^\mu(x) = a^\mu e^{ik\cdot x}$. Welche Bedingungen erfüllen k und a?
   iv) Drücken Sie $\boldsymbol{E}(x)$ und $\boldsymbol{B}(x)$ durch $\boldsymbol{a}$ und $\boldsymbol{k}$ aus und berechnen Sie $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}$ und $B^2 - E^2/c^2$ (vgl. a)). Gibt es ein Inertialsystem, in dem die ebene elektromagnetische Welle ein rein elektrisches Feld ($\boldsymbol{B} = 0$) oder ein rein magnetisches Feld ($\boldsymbol{E} = 0$) ist?

c) Zeigen Sie, dass $F_{\mu\nu}$ invariant ist unter *Eichtransformationen* $A_\mu \mapsto A_\mu - \partial_\mu f$ mit beliebigem $f \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$. Welcher Gleichung muss die Erzeugendenfunktion f genügen, damit die Lorenzeichung erfüllt bleibt?

d) In Anwesenheit von Ladungen lauten die inhomogenen Maxwellgleichungen $\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu$ mit der (lorentzinvarianten) Permeabilität des Vakuums μ_0 und der Viererstromdichte $j^\nu = (c\rho, \boldsymbol{j})$.

   Zeigen Sie, dass j^ν divergenzfrei ist, d.h. $\partial_\nu j^\nu = 0$ und dass damit die Kontinuitätsgleichung für die Ladung folgt:

$$\partial_t\rho + \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0.$$

e) Zeigen Sie, dass die Viererkraft $F^\mu = q u_\nu F^{\nu\mu}$ senkrecht auf u_μ steht ($u \cdot F = 0$). Um welche Kraft handelt es sich und welche Bedeutung hat der Lorentzskalar q?

Aufgabe 16: Lorentztransformation der Felder **(schriftlich, 7 Punkte)**

Die elektromagnetischen Feldstärken transformieren sich bei einem Wechsel des Inertialsystems gemäß

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta F^{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha F^{\alpha\beta} (\Lambda^\mathrm{T})_\beta{}^\nu = (\Lambda F \Lambda^\mathrm{T})^{\mu\nu}.$$

a) (3 Punkte) Betrachten Sie einen Lorentzboost von ein Inertialsystem S in ein Inertialsystem S' mit $\boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{e}_x$, d. h.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Komponenten F_{23} und F_{01} invariant sind. Was folgt damit für B'_x und E'_x?

Hinweise: Schreiben Sie $F = \begin{pmatrix} f & g \\ -g^\mathrm{T} & h \end{pmatrix}$ mit den 2x2 Matrizen f, g, h. Verwenden Sie $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\Gamma & B\Delta \\ C\Gamma & D\Delta \end{pmatrix}$ für beliebige 2x2 Matrizen $A, B, C, D, \Gamma, \Delta$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass aus $g' = \lambda g$ (siehe a)) folgt:

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z), B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{vE_z}{c^2}\right),$$
$$E'_z = \gamma\left(E_z + vB_y\right), B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right).$$

c) (2 Punkte) Im Ursprung von S' ruhe eine Punktladung q. Zeigen Sie, dass zwischen den Feldern $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ im Bezugssystem S die Beziehung

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}$$

gilt.

Im Grenzfall $v \ll c$ ist dabei

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$$

das Coulomb-Feld der Punktladung q. Welches bekannte Gesetz ergibt sich damit für das Magnetfeld $\boldsymbol{B}$?