Fachbereich Physik

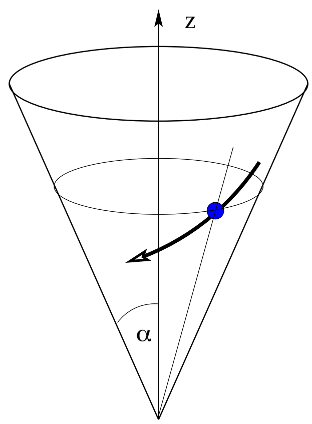
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
www.tinyurl.com/2021ik3

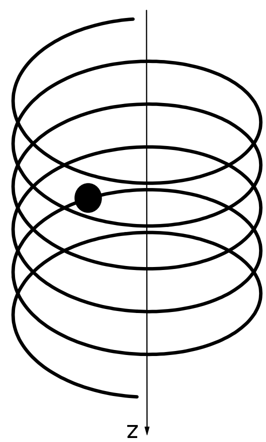
Universität Konstanz

Übungsblatt 8

(Abgabe am 22.12.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am **23.12.21 oder 07.01.22**)

Aufgabe 19: Lagrange-Multiplikatoren **(3 Kreuze)**





a) Ein Teilchen bewegt sich auf einem Kreiskegelmantel mit Öffnungswinkel α und unterliegt der Schwerkraft (siehe Skizze links).

i) Schreiben Sie die Lagrangefunktion für ein freies Teilchen im Gravitationspotential in Zylinderkoordinaten hin. Formulieren Sie außerdem die Zwangsbedingung, die die Bewegung des Teilchens auf den Kegelmantel beschränkt.

ii) Bestimmen Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen unter Einbeziehung der Zwangsbedingung über einen Lagrange-Multiplikator. Eliminieren Sie dann aus den vier Gleichungen den Multiplikator und eine Koordinate, so dass Sie zwei Bewegungsgleichungen für zwei Koordinaten erhalten.

b) Gehen Sie von der Lagrangefunktion eines freien Teilchens ohne Schwerkraft aus. Beschränken Sie die Bewegung des Teilchens auf eine Schraubenlinie wie in der Skizze rechts. Bestimmen Sie die Bewegungsgleichung über die Methode der Lagrange-Multiplikatoren und lösen Sie sie.

Aufgabe 20: Hamiltonsches Prinzip (schriftlich) **(6 Punkte)**

Als einfaches Beispiel der Variationsrechnung wollen wir ein Problem zunächst auf einen freien Parameter einschränken und diesen dann optimieren.
Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens der Masse m in dem Potential $V(z) = -mgz$ (negative z-Achse). Wir nehmen an, dass sich die Bahnkurve in der Form $z(t) = at^2 + bt + c$ schreiben lässt. Dabei soll gelten $z(0) = 0$ und $z(t_0) = z_0$, wodurch b und c festgelegt sind.

a) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion $L(z(t), \dot{z}(t), t)$.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Wirkung als Funktion des Parameters a, $S(a) = \int_0^{t_0} L \, \mathrm{d}t$, und bestimmen Sie die minimale Wirkung bei Variation von a.

c) (2 Punkte) Skizzieren Sie für $z_0 = \frac{g}{2} t_0^2$ verschiedene Kurven $z(t)$ sowie die mit der minimalen Wirkung.