Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
www.tinyurl.com/2021ik3

Universität Konstanz

Übungsblatt 9

(Abgabe am 12.01.22 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 13.01.22 oder 14.01.22)

Aufgabe 21: Kürzester Weg auf Zylinder- und Kegeloberfläche **(3 Kreuze)**

Ein Variationsproblem der Form

$$\int L(y, y', x)\,\mathrm{d}x = \text{Extremum} \Leftrightarrow \delta \int L(y, y', x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ mit } \ y = y(x)$$

wird gelöst durch die entsprechende Euler-Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial L}{\partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung ist also die Funktion $y(x)$, für die das obiges Funktional extremal (d. h., minimal oder maximal) wird.

a) Finden Sie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte in der (x, y)-Ebene.

   Hinweis: Verwenden Sie hierzu das Wegelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$ und die obige Euler-Lagrange-Gleichung.

b) Finden sie die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Zylinders. Schreiben Sie dazu das Wegelement $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ in Zylinderkoordinaten ϕ und z ($r = \text{const.}$). Durch die Parametrisierung $z = z(\phi)$ erhalten Sie ein Funktional der Form $\int \mathrm{d}s = \int \mathrm{d}\phi\ L(z'(\phi))$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Euler-Gleichung den extremalen Weg $z(\phi)$. Um was für eine Kurve handelt es sich dabei?

c) Gesucht ist die kürzeste Verbindungslinie zweier Punkte auf der Oberfläche eines Kegels. Drücken Sie hierzu wieder das Wegelement $\mathrm{d}s$ in Zylinderkoordinaten (mit $r/z = \tan\alpha = \text{const.}$), und wählen Sie die Parametrisierung $\phi = \phi(r)$. Bestimmen Sie das Extremum des Funktionals $\int \mathrm{d}r L(\phi'(r), r)$.

   Hinweise:

   - $$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arccos\left(\frac{a}{x}\right).$$
   - Das Ergebnis lässt sich schreiben in der Form

     $$r_m = r\cos[\sin(\alpha)(\phi - \phi_m)].$$

d) Was ergibt sich im Extremfall $\alpha \to \pi/2$?

Aufgabe 22: Galilei-Transformation und Noether-Theorem **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) (2 Punkte) Führen Sie eine Galilei-Transformation $z \to Z = z + \alpha t$ der Lagrangefunktion L für den freien Fall einer Masse m in einem homogenen Schwerefeld durch.

b) (2 Punkte) Für eine kontinuierliche Symmetrie der Lagrangefunktion, d. h.

$$L'(Z, \dot{Z}, t, \alpha) = L(Z, \dot{Z}, t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} F(Z, t, \alpha)$$

liefert das Noether-Theorem eine Erhaltungsgröße

$$I(z, \dot{z}, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \left. \frac{\partial z(Z, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} - \left. \frac{\partial F(Z, t, \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} .$$

Bestimmen Sie die Erhaltungsgröße I.

c) (2 Punkte) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und zeigen Sie damit, dass das Ergebnis aus b) eine Konstante der Bewegung ist.

Aufgabe 23: Teilchenbahnen in gekreuzten elektromagnetischen Feldern **(5 Kreuze)**

Gesucht wird die Bahnkurve eines Teilchens mit Ladung q und Masse m in homogenen statischen elektrischen $\boldsymbol{E}$ und magnetischen $\boldsymbol{B}$ Feldern, welche senkrecht aufeinander stehen, $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$. Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\boldsymbol{E} = E\hat{\boldsymbol{y}}$ und $\boldsymbol{B} = B\hat{\boldsymbol{z}}$.

Die Lagrangefunktion für das Teilchen lautet

$$L = \frac{m}{2} \boldsymbol{v}^2 - q\, \phi(\boldsymbol{r}) + q\, \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

mit den elektromagnetischen Potentialen, aus denen die statischen Felder folgen:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla \phi \quad \text{und} \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} .$$

Die Newtonsche Bewegungsgleichung für das Teilchen lautet

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = q\, (\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) .$$

a) Zeigen Sie, dass die Wahl $\phi = -E\, y$ und $\boldsymbol{A} = -B\, y\, \hat{\boldsymbol{x}}$ zu den gewünschten elektromagnetischen Feldern führt. Wie lautet dann die Lagrangefunktion?

   Hinweis: Alle folgenden Teilaufgaben können unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die angegebene Reihenfolge wird empfohlen.

b) Zeigen Sie mit dem Euler-Lagrange Formalismus, dass die Lagrangefunktion von Teilaufgabe a) auf dieselben Bewegungsgleichungen führt wie die Newtonschen für diesen Spezialfall.

c) Welche zyklischen Variablen liegen vor und welche zeitlich erhaltenen Größen folgen daraus?

d) Bestimmen Sie mit dem Noether-Theorem ein *weiteres* Integral der Bewegung (d. h. eine weitere Erhaltungsgröße).
   Hinweis: Das Noether-Theorem liefert für jede Symmetrie der Lagrangefunktion, d. h.

$$\tilde{L}(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}', \alpha) = L(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{v}') + \frac{d}{dt} F(\boldsymbol{r}', t, \alpha),$$

   eine Erhaltungsgröße

$$J(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) = \left. \left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \alpha} - \frac{\partial F}{\partial \alpha} \right) \right|_{\alpha=0} .$$

e) Berechnen Sie die Bahnkurven $\boldsymbol{r}(t)$ für ein Teilchen, das zum Zeitnullpunkt am Ursprung ist und in $\hat{\boldsymbol{x}}$-Richtung fliegt, d. h. $\boldsymbol{r}(0) = 0$ und $\boldsymbol{v}(0) = \mathrm{v}_0 \hat{\boldsymbol{x}}$.
   Hinweis: Die komplexe Hilfsvariable $\zeta(t) = x(t) + i\, y(t)$ kann zur Lösung der Differenzialgleichung nützlich sein.