Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`www.tinyurl.com/2021IK3`

Universität Konstanz

Übungsblatt 2

(Abgabe am 10.11.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 04.11.21 oder 05.11.21)

Aufgabe 4: Propagator der Wellengleichung (schriftlich, 5 Punkte)

In der Vorlesung wurde der *Propagator* der allgemeinen Wellengleichung hergeleitet:

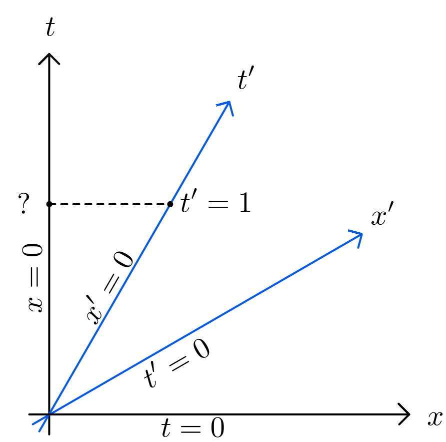
$$D(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \mathrm{d}^3k \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{ck}\sin(kct).$$

Verwenden Sie das Volumenelement in Kugelkoordinaten, die Substitution $x = \cos\theta$ und die Ergebnisse aus Aufgabe 2, um zu zeigen, dass sich der Propagator umformen lässt zu

$$D(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{4\pi cr}(\delta(r+ct) - \delta(r-ct)).$$

Aufgabe 5: Zwillingsparadoxon (3 Kreuze)

Stellen Sie sich vor, Sie haben einen Zwilling, der genauso alt ist wie Sie und der sich am selben Ort befindet wie Sie. Bezeichnen Sie Ihre Koordinaten als t, x, und die Ihres Zwillings als t', x'. Nehmen wir an, dass bei $t = t' = 0$ Ihre Koordinatensysteme gleich sind, und dass bei $t = t' = 0$ Ihr Zwilling in ein Raumschiff steigt und mit der Geschwindigkeit v in die positive x-Richtung reist (s. Diagramm).



Ihre Koordinaten und die Ihres Zwillings sind verbunden durch die Lorentztransformation

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{1}$$

Bei $t' = 1$ Jahr ändert der Zwilling seine Richtung und bewegt sich nun mit der Geschwindigkeit v in die Richtung $-x$.

a) Zu welchem Zeitpunkt wechselt der Zwilling in Ihren Koordinaten die Richtung? Wer ist zu diesem Zeitpunkt jünger?

b) Wie viel jünger ist der Zwilling nach seiner Rückkehr?

Zunächst erscheint es, dass Ihre Erfahrungen und jene Ihres Zwillings symmetrisch sein sollten. Wenn Sie sehen, dass sich Ihr Zwilling von Ihnen wegbewegt, dann sieht Ihr Zwilling auch, dass Sie sich wegbewegen, aber in die entgegengesetzte Richtung. Es gibt keine bevorzugten Richtungen im Raum, warum sollten Sie und Ihr Zwilling also anders altern? In Wirklichkeit sind die Erfahrungen von Ihnen und Ihrem Zwilling nicht symmetrisch. Um seine Richtung zu ändern, erfährt Ihr Zwilling eine starke Beschleunigung, während Sie selbst dies nicht tun. Aufgrund dieser abrupten Umkehrung ist das Koordinatensystem des Zwillings kein Inertialsystem, Ihres aber schon.

c) Invertieren Sie die Lorentz-Transformationen[1], Gleichung (1), und zeigen Sie, dass vor der Umkehrung die Beziehung zwischen Ihnen und Ihrem Zwilling symmetrisch ist. Jeder Zwilling sieht den anderen als langsamer alternd als sich selbst.

d) Zeigen Sie mithilfe von Raumzeitdiagrammen, wie sich die Definition der Gleichzeitigkeit durch den abrupten Wechsel des Reisenden von einem Inertialsystem zum anderen ändert. Im neuen Inertialsystem des Reisenden ist sein Zwilling plötzlich viel älter, als er es im ursprünglichen Inertialsystem des Reisenden war.

Aufgabe 6: Addition von Geschwindigkeiten (3 Kreuze)

Führt man zwei spezielle Lorentz-Transformationen, deren Geschwindigkeitsvektoren nicht in die gleiche Richtung zeigen, hintereinander aus, so ergibt sich eine spezielle Lorentz-Transformation mit einer zusätzlichen Raumdrehung. Im Folgenden nehmen wir an, dass die erste Transformation in z-Richtung und die zweite senkrecht dazu in x-Richtung erfolgt.

a) Ermitteln Sie die Matrix L der resultierenden Transformation durch Ausführung der beiden speziellen Transformationen mit den Geschwindigkeiten v in z-Richtung und u in x-Richtung. Stellen Sie die resultierende Transformation durch eine spezielle Lorentz-Transformation mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$ und einer Drehung um den Winkel α, d. h. $L = R(\alpha)\Lambda(\boldsymbol{w})$ dar und zeigen Sie, dass

$$|\boldsymbol{w}| = \sqrt{u^2 + v^2 - \frac{u^2 v^2}{c^2}}. \tag{2}$$

Hinweis: Die Drehung ändert bestimmte Komponenten von L nicht.

b) Ist das Ergebnis (2) symmetrisch in u und v? Ergibt sich das selbe Ergebnis, wenn man erst in x- und dann in z-Richtung transformiert? Welche Koordinatentransformation verhält sich genauso?

c) Eine spezielle Lorentz-Transformation in $\boldsymbol{w}$-Richtung erhält man aus der bekannten Transformation in z-Richtung, indem man zuerst das Koordinatensystem so dreht, dass $\boldsymbol{w}$ parallel zu z liegt, danach entlang z transformiert, und dann die Drehung rückgängig macht. Zeigen Sie, dass sich damit ergibt (y-Komponente vernachlässigt):

$$\Lambda(\boldsymbol{w}) = \begin{pmatrix} \gamma(w) & -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & -\gamma(w)\frac{w_z}{c} \\ -\gamma(w)\frac{w_x}{c} & 1 + (\gamma(w)-1)\frac{w_x^2}{w^2} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} \\ -\gamma(w)\frac{w_z}{c} & (\gamma(w)-1)\frac{w_x w_z}{w^2} & 1 + (\gamma(w)-1)\frac{w_z^2}{w^2} \end{pmatrix}$$

mit

$$\gamma(w) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{c^2}}}.$$

[1] Um die Lorentz-Transformationen zu invertieren, müssen Sie keine Berechnungen durchführen.