Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`www.tinyurl.com/2021ik3`

Universität Konstanz

Übungsblatt 10

(Abgabe am 19.01.22 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 20.01.22 oder 21.01.22)

Aufgabe 24: Legendre-Transformation (schriftlich, 8 Punkte)

Sei $f : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strikt konvex, d. h. $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$.

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x,y) = xy - f(x)$ für ein festes y entweder kein oder ein eindeutiges Maximum $x(y) = (f')^{-1}(y)$ hat. (1 Punkt)

b) Die Legendre-Transformation $f \to f^*$ wird mit Hilfe des *Supremums* definiert:

$$f^*(y) = \sup_x (xy - f(x)) = x(y)y - f(x(y)).$$

Zeigen Sie

i) $f(x) = g(\alpha x) \Rightarrow f^*(y) = g^*(y/\alpha) \ \ (\alpha \neq 0)$,

ii) $f(x) = \frac{1}{r} x^r \Rightarrow f^*(y) = \frac{1}{s} y^s$ mit $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1 \ \ (r, s > 1)$,

iii) $f(x) + f^*(y) \geq xy$ (Young'sche Ungleichung). Was folgt mit ii)? (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie $f^*(y)$ für $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x$ und skizzieren Sie beide Funktionen. (1 Punkt)

d) Zeigen Sie $(f^*)^* = f$, d. h. die Legendre-Transformation ist eine *Involution*. (1 Punkt)
Hinweis: $(f^*)''(y) > 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen angewendet auf f'.

e) Die Legendre-Transformation einer Funktion $f(x, y)$ zweier Variablen bzgl. x zu $z = \partial f / \partial x$ ist definiert durch

$$f^*(z, y) = x(z)z - f(x(z), y).$$

Unter welcher Bedingung gilt $\frac{\partial f^*}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial y}$?
Was folgt damit aus der Legendre-Transformation $\dot{q} \to p$ mit $p = \partial L / \partial \dot{q}$ gegeben durch

$$H(q, p, t) = p\dot{q}(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t)?$$ (2 Punkte)

Aufgabe 25: Relativistische Hamiltonfunktion in elektromagn. Feldern (5 Kreuze)

a) Die nicht-relativistische Lagrangefunktion in allgemeinen zeitabhängigen Feldern lautet für ein Teilchen mit der Ladung q:

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\varphi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t).$$

Zeigen Sie, dass sich bei diesem Problem der verallgemeinerte Impuls $\boldsymbol{p}$ vom kinetischen ("normalen") Impuls unterscheidet. Bestimmen Sie die Hamiltonfunktion für ein Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld. Schreiben Sie das Resultat einmal als Funktion von $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \varphi\}$ und ein zweites mal als Funktion von $\{\boldsymbol{v}, \varphi\}$. Wie lauten damit die Hamiltonschen Gleichungen?

Erklären Sie anschaulich, warum die Gesamtenergie nur vom elektrischen Feld, nicht aber vom Magnetfeld abhängt.

b) Begründen Sie, dass für ein relativistisches Teilchen der Ladung q im elektromagnetischen Feld die Wirkung

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_-}^{\tau_+} \hat{L}(x(\tau), \dot{x}(\tau), \tau) \, d\tau$$

mit $\hat{L} = -mc^2 + (q/c)A_\nu u^\nu$ extremalisiert wird, wobei τ die Eigenzeit des Teilchens entlang seiner Weltlinie ist. Hier ist $A_\nu : (-\varphi, A_i)$ das 4er-Potential des elektromagnetischen Feldes, und $u : (c, \boldsymbol{v}(t))/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ die 4er-Geschwindigkeit des Teilchens.

Hinweis: Schreiben Sie das Wirkungsintegral als Integral über die Zeit t und wenden Sie die Euler-Lagrange-Gleichungen an. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem bekannten Ausdruck für die Lorentz-Kraft, $\boldsymbol{F}_L = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}/c \times \boldsymbol{B})$.

c) Aus Teilaufgabe b) erhalten Sie

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2} - q\varphi(\boldsymbol{r}, t) + \frac{q}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t).$$

Entwickeln Sie die relativistische Lagrangefunktion im nicht-relativistischen Grenzfall $v/c \ll 1$ und vergleichen Sie mit a). Berechnen Sie die relativistische Hamiltonfunktion. Schreiben Sie das Resultat als Funktion von $\{\boldsymbol{v}, \varphi\}$ und als Funktion von $\{\boldsymbol{p}, \boldsymbol{A}, \varphi\}$.

Hinweis: Im zweiten Fall lautet das Resultat $H = c\sqrt{m^2c^2 + \left(\boldsymbol{p} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}\right)^2} + q\varphi$.

Wann gilt also die Einsteinsche Energie-Impuls-Beziehung $H = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}$?

d) Betrachten Sie nun ein relativistisches Teilchen der Ladung q in einem Vektorpotential $\boldsymbol{A} = 1/2(-By, Bx, 0)$ ($\varphi = 0$). Wie lautet damit das Magnetfeld? Zeigen Sie, dass die Energie des Teilchens zeitlich konstant ist. Stellen Sie dann die Hamiltonschen Gleichungen auf, und berechnen Sie die Bahn des Teilchens mit den Anfangsbedingungen: $\boldsymbol{r}(t = 0) = (0, r_0, 0)$, $\dot{\boldsymbol{r}}(t = 0) = (v, 0, w)$. Diskutieren Sie die Teilchenbahn.

Hinweis: Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen sind hier 6 lineare Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten, von denen 2 trivial und 4 gekoppelt sind. Eine mögliche Lösung der 4 gekoppelten Gleichungen ist, zuerst p_x und p_y zu eliminieren und dann eine Differentialgleichung erster Ordnung für die Hilfsgröße $\zeta(t) = x(t) + iy(t)$ aufzustellen.

e) Die Lorentz-invariante Lagrangefunktion des freien Teilchens lautet

$$L_{\text{inv}}(u, \tau) = -mc\sqrt{u_\mu u^\mu}$$

mit der relativistischen Geschwindigkeit $u^\mu = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau}$. Der kanonische Impuls ist dann $p_\mu = \frac{\partial L_{\text{inv}}}{\partial u^\mu}$.
Berechnen Sie den kanonischen Impuls und zeigen Sie, dass die Transformation

$$H(p, \tau) = p_\mu u^\mu - L_{\text{inv}}(u, \tau)$$

auf $H = 0$ führt. Das so erhaltene H ist also zur Beschreibung des Systems nicht sinnvoll.
Das Problem lässt sich lösen, in dem man die Methode der Lagrange-Multiplikatoren verwendet, d. h.

$$H' = H + \lambda f(p)$$

mit der Nebenbedingung $f(p) = p^2 - m^2c^2$. Finden Sie damit die Bewegungsgleichung und vergleichen Sie mit der Bewegungsgleichung aus der Euler-Lagrange-Gleichung.