Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
www.tinyurl.com/2021ik3

Universität Konstanz

Übungsblatt 12 (von 13)

(Abgabe am 02.02.22 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 03.02.22 oder 04.02.22)

Aufgabe 29: Prinzip von Euler-Maupertuis **(3 Kreuze)**

Das Prinzip von Euler-Maupertuis besagt, dass die geometrische Bahn ρ von q_i zu q_f eines Punktteilchens mit konstanter Energie E in einem Potenzial $V(q)$ gegeben wird durch

$$\delta \int_{q_\mathrm{i}}^{q_\mathrm{f}} \sqrt{E - V(q)}\,\mathrm{d}\rho = 0. \tag{1}$$

Sie werfen einen Stein mit Energie E und treffen dabei x_f Meter entfernt ein Ziel auf dem Boden. (Wir vernachlässigen Reibung, die Krümmung der Erde, die Ausdehnung des Steins, und deine eigene Länge.)

a) Berechnen Sie mithilfe von Gl. (1) die (möchlichen) Bahn(en) des Steins. Sie dürfen dabei davon ausgehen, dass der Stein sich in einer vertikalen Ebene bewegt und sich dabei ständig von Ihnen entfernt.

   Zur Lösung der Differenzialgleichung die aus Gl. (1) folgt, können Sie als Ansatz verwenden, dass die Bahn durch ein Polynom von Grad zwei gegeben ist.

b) Diskutieren Sie Ihre Antwort. Was ist der optimale Wurfwinkel, falls Sie den Stein so weit wie möchlich werfen möchten?

Aufgabe 30: Kanonische Transformationen **(2 Kreuze)**

a) Finden Sie die Parameter α und β für die die folgende Transformation kanonisch ist:

$$q' = q^\alpha \cos(\beta p) \quad , \quad p' = q^\alpha \sin(\beta p)\,. \tag{2}$$

b) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $F(p, q')$ der Transformation (2) aus den Gleichungen

$$q = -\frac{\partial F(p,q')}{\partial p} \quad , \quad p' = -\frac{\partial F(p,q')}{\partial q'}\,. \tag{3}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass hier die Erzeugende als Funktion von p und q' betrachtet wird.

c) Leiten Sie die Gleichungen (3) analog zur Vorlesung ab.

Aufgabe 31: Anwendung kanonischer Transformationen **(schriftlich, 6 Punkte)**

a) Studieren Sie folgendes einfache Hamiltonsche System:

$$H(q', p') = \omega p'.$$

   Welche auffälligen Erhaltungsgrößen existieren, wie lauten die Bahnen? (1 P.)

b) Es sei folgende kanonische Transformation gegeben:

$$p = \sqrt{2m\omega p'} \cos q' \quad \text{und} \quad q = \sqrt{\frac{2p'}{m\omega}} \sin q'.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonklammer, dass q und p *kanonische* Variablen sind, d. h. für die folgenden *fundamentalen Poissonklammern* gilt

$$\{q, p\} = 1, \{q, q\} = \{p, p\} = 0.$$

Wie lautet $H(p, q)$? Geben sie die Lösung für $q(t)$ an. Was für ein physikalisches System beschreiben die Gleichungen in diesen Koordinaten? (2 P.)

c) Betrachten Sie die komplexe Transformation

$$q' = \frac{m\omega q + ip}{\sqrt{2m\omega}}, \quad p' = iq'^* = \frac{p + im\omega q}{\sqrt{2m\omega}}.$$

Wie lauten also $q(q', p')$ und $p(q', p')$? Zeigen Sie mit Hilfe der Poissonklammern, dass diese Transformation kanonisch ist, d. h. für die transformierten Koordinaten gelten die kanonischen (Hamiltonschen) Gleichungen. Wenden Sie die Transformation auf den eindimensionalen harmonischen Oszillator an. Zeigen Sie, dass sich auch hier die bekannten Lösungen $(q(t), p(t))$ ergeben. (3 P.)

Ausblick: Die kanonische Transformation in b) spielt eine wichtige Rolle in der Quantenmechanik.