Fachbereich Physik

Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Joris Kattemölle (Übungen)
Übungen zur Vorlesung Physik III: Integrierter Kurs (Theorie)
Wintersemester 2021/22
`www.tinyurl.com/2021ik3`

Universität Konstanz

Übungsblatt 3

(Abgabe am 17.11.21 im Hörsaal oder per E-mail, Übung am 18.11.21 oder 19.11.21)

Aufgabe 7: Bewegung im homogenen Kraftfeld (schriftlich) **(10 Punkte)**

Für eine anfänglich ruhende Masse im homogenen Kraftfeld soll jeweils die Bewegungsgleichung nach der Newtonschen und relativistischen Mechanik gelöst werden. Geschwindigkeit und Kraft sind in diesem eindimensionalen Problem immer parallel, so dass wir auf vektorielle Größen verzichten können. In der Newtonschen Mechanik können die Beziehungen

$$p = mv \qquad \text{und} \qquad E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$$

für Impuls und kinetische Energie zugrunde gelegt werden. In der relativistischen Mechanik dürfen Sie von folgendem Wissen ausgehen:

$$p = \gamma m v, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad E_{\text{kin}} = (\gamma - 1)mc^2 = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4} - mc^2.$$

(m: Ruhemasse)
Lösen Sie

$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$$

mit konstanter Kraft F und leiten Sie den Impuls, die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die kinetische Energie als Funktion der Zeit ab und skizzieren Sie diese Größen jeweils zum Vergleich in ein Diagramm für Newtonsche und relativistische Mechanik.

Aufgabe 8: Längenkontraktion **(3 Kreuze)**

Σ und Σ' seien zwei mit $\boldsymbol{v} = \mathrm{v}\,\boldsymbol{e}_z = \text{const.}$ relativ zueinander bewegte Inertialsysteme.

a) Ein in Σ ruhender Stab schließt mit der z-Achse einen Winkel von 45° ein. Unter welchem Winkel erscheint er in Σ'?

b) Ein Teilchen habe in Σ die Geschwindigkeit $u = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 2v \end{pmatrix}$. Welche Winkel bildet seine Bahn mit den z-Achsen in Σ und Σ'?

c) Ein Photon verlässt den Ursprung von Σ zur Zeit $t = 0$ in einer Richtung, die mit der z-Achse einen Winkel von 45° bildet. Welcher Winkel ergibt sich in Σ'?

Aufgabe 9: Lorentztransformation **(4 Kreuze)**

In der Vorlesung wurden der metrische Tensor g über $x \cdot y = x^\mu g_{\mu\nu} y^\nu = x^0 y^0 - \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ (mit Summenkonvention) und die Lorentztransformation Λ über $x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ eingeführt. Es wurde gezeigt, dass $\Lambda^{\mathrm{T}} g \Lambda = g$, d. h. in Komponenten

$$(\Lambda^{\mathrm{T}})_\nu{}^\mu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = \Lambda^\mu{}_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho{}_\sigma = g_{\nu\sigma} = \begin{pmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

a) Zeigen Sie folgende Eigenschaften des metrischen Tensors g:

   i) $g^{\mathrm{T}} = g$, d. h. $(g^{\mathrm{T}})_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$.

   ii) $g = g^{-1}$ bzw. $g^2 = \mathbb{1}$, d. h. $g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu = \begin{cases} 1, \mu = \rho \\ 0, \text{sonst} \end{cases}$.

iii) $\det g = -1$.

b) Zeigen Sie, dass $\det \Lambda = \pm 1$.

Welches Vorzeichen erhält man für die folgenden speziellen Transformationen? Um welche Transformationen handelt es sich?

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_2 = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}, \Lambda_4 = -\Lambda_1.$$

Zeigen Sie allgemein, dass $|\Lambda_0{}^0|^2 \geq 1$.
Hinweis: Betrachten Sie g_{00} in (1).

Im Folgenden beschränken wir uns auf die *eigentlichen* ($\det \Lambda = +1$) und *orthochronen* ($\Lambda_0{}^0 \geq 1$) Lorentztransformationen.

c) *Invertierung der Lorentztransformation*: Zeigen Sie mit Hilfe von (1), dass $\Lambda^{-1} = g^{-1}\Lambda^{\mathrm{T}} g$, d. h. in Komponenten $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = g^{\mu\rho}(\Lambda^{\mathrm{T}})_\rho{}^\sigma g_{\sigma\nu}$.

Hinweis: $\Lambda^{-1}\Lambda = \mathbb{1}$. Betrachten Sie einen Lorentzboost im Raum (x^0, x^1), $\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 \\ \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 \end{pmatrix}$, und stellen Sie $(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu$ auf.

d) Leiten Sie ausgehend von $\Lambda^\mu{}_\nu = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh\chi & -\sinh\chi \\ -\sinh\chi & \cosh\chi \end{pmatrix}$, $\beta = \tanh\chi = v/c$, die Standardform der Lorentztransformation her:

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Was ergibt sich für $v \ll c$? Wie lautet die inverse Transformation (siehe c)?