UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Wolf-Rüdiger Hannes
http://tinyurl.com/2024ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 6
Ausgabe: 15.05.2024, Abgabe: 22.05.2024, Übungen: 24.06.2024

Aufgabe 15: Wellenfunktion, Wahrscheinlichkeitsdichten, etc. (6 Punkte)

a) Prüfen Sie, ob folgende Funktionen Eigenfunktionen des Impulsoperators $\hat{p}_x$ sind:

   i) $A\sin(kx) + A\cos(kx)$
   ii) $a\cos(kx) + ia\sin(kx)$
   iii) $Ae^{ik(x-a)}$
   iv) $ae^{ikx} + iae^{-ikx}$ (2 Punkte)

b) Zeigen Sie, dass das Integral über die Wahrscheinlichkeitsdichte zeitlich konstant bleibt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \psi^*(x,t)\psi(x,t)\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{(2 Punkte)}$$

c) Warum kann die Größe $j = \frac{\hbar}{2mi}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial x} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial x}\right)$ als Wahrscheinlichkeitsstromdichte interpretiert werden? (2 Punkte)
Hinweis: Formulieren Sie die eindimensionale Kontinuitätsgleichung.

Aufgabe 16: Anziehendes Delta-Potential (mündlich)

Gegeben sei ein eindimensionales Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$, $V_0 > 0$.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der stationären Schrödingergleichung die Anschlussbedingung

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mid_{x=\varepsilon} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\psi(x)\mid_{x=-\varepsilon}\right] = -\frac{2mV_0}{\hbar^2}\psi(0).$$

b) Es gibt genau einen gebundenen Zustand mit dem Energieeigenwert $E < 0$. Geben Sie sowohl die Energie, als auch die dazugehörige normierte Wellenfunktion an.

c) Geben Sie auch die Eigenfunktionen mit $E > 0$ an und zeigen Sie, dass diese orthogonal zur Eigenfunktion aus b) sind.

Hinweise: Zu jedem gegebenen $E > 0$ gibt es zwei linear unabhängige Eigenfunktionen. Die Rechnung wird wesentlich vereinfacht, wenn man eine dieser Funktionen symmetrisch zum Ursprung wählt, wobei die andere antisymmetrisch ist.

Aufgabe 17: Resonanzen am Potentialtopf (mündlich)

Der rechteckige eindimensionale Potentialtopf kann als einfaches Modell für kurzreichweitige, anziehende Kräfte betrachtet werden. Das Potential ist dabei gegeben durch

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| < a/2, \quad \text{mit } V_0 > 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

In der Vorlesung wurden gebundene Zustände des Problems behandelt, d.h. Teilchenenergien $E < 0$. Nun soll die Energie $E > 0$ betragen.

a) Formulieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für das Problem. Machen Sie je einen Lösungsansatz für die drei Bereiche (I: $x < -a/2$, II: $|x| < a/2$, III: $x > a/2$). Die Amplitude der von $-\infty$ einlaufenden Welle kann o.B.d.A. gleich 1 gesetzt werden. Die Amplitude der reflektierten Welle sei $\tilde{R}$ und die der transmittierten Welle im Gebiet III sei $\tilde{T}$. Wie hängt die Wellenzahl q in den Gebieten I und III und k im Gebiet II mit der Energie zusammen?

b) Stellen Sie mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen ein Gleichungssystem für die vier unbekannten Amplituden auf. Lösen Sie das Gleichungssystem z.B. durch Einsetzen und zeigen Sie, dass die transmittierte Amplitude gegeben ist durch

$$\tilde{T} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}qa}}{\cos(ka) - \mathrm{i}\frac{k^2+q^2}{2kq}\sin(ka)}.$$

c) Bestimmen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit $T(E) = |\tilde{T}(E)|^2$ als Funktion der Energie und skizzieren Sie die Funktion. Bei welchen Energien gilt $T(E) = 1$? Wie lässt sich dieses Verhalten anschaulich verstehen?

d) Durch analytische Fortsetzung von $\tilde{T}$ für negative Energien hat $\tilde{T}$ Polstellen. Verwenden Sie $q = \mathrm{i}\kappa$ und zeigen Sie, dass die Position der Polstellen von $\tilde{T}$ genau den gebundenen Zuständen entspricht.

Hinweis: Formen Sie die Bestimmungsgleichung der Polstellen so um, dass sich die Bestimmungsgleichungen der gebundenen Zustände ergeben.