UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Wolf-Rüdiger Hannes
http://tinyurl.com/2024ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 8
Ausgabe: 05.06.2024, Abgabe: 12.06.2024, Übungen: 14.06.2024

Aufgabe 20: Drehimpulsalgebra

a) Berechnen Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator

$$\hat{\boldsymbol{L}} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)^T = \hat{\boldsymbol{r}} \times \hat{\boldsymbol{p}}$$

bzw. $\hat{L}_i = \sum_{jk} \epsilon_{ijk} \hat{x}_j \hat{p}_k$ mit den bekannten Kommutatorrelationen der Orts- und Impulskomponenten:

$$[\hat{L}_i, \hat{x}_j],\ [\hat{L}_i, \hat{p}_j],\ [\hat{L}_i, \hat{L}_j],$$
$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i],\ [\hat{L}_i, \hat{r}^2],\ [\hat{L}_i, \hat{p}^2].$$

b) Zeigen Sie außerdem mit den Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm i\hat{L}_y$, dass:

$$[\hat{L}_z, \hat{L}_\pm] = \pm\hbar\hat{L}_\pm,$$
$$[\hat{L}^2, \hat{L}_\pm] = 0,$$
$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-] = 2\hbar\hat{L}_z,$$
$$\hat{L}_+\hat{L}_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hbar\hat{L}_z.$$

Aufgabe 21: Eigenzustände von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_x$ (schriftlich - 6 Punkte)

Als "Drehimpulsstandardbasis" bezeichnet man die orthonormierte Basis $\{\psi_{l,m}(r)\}$ der simultanen Eigenzustände von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$. In dieser Aufgabe sollen Sie für den Drehimpuls $l = 1$ die Eigenzustände $\psi_{1,\mu}(r)$ von $\hat{L}_x$, welche $\hat{L}_x\psi_{1,\mu}(r) = \hbar\mu\psi_{1,\mu}(r)$ mit $\mu = 0, \pm 1$ erfüllen, durch die Eigenzustände $\psi_{1,m}(r)$ von $\hat{L}_z$ ausdrücken.

a) (1 Punkt) Berechnen Sie mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{L}_\pm = \hat{L}_x \pm \mathrm{i}\hat{L}_y$ die Elemente der Matrix $\int \psi^*_{1,m'}(r)\hat{L}_x\psi_{1,m}(r)\mathrm{d}r$.

Hinweis: $\hat{L}_\pm\psi_{l,m}(r) = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\psi_{l,m\pm 1}(r)$.

b) (2 Punkte) Entwickeln Sie $\psi_{1,\mu}(r)$ in der Basis $\{\psi_{1,m}(r)\}$ und geben Sie mit der Matrix aus (a) die Entwicklungskoeffizienten an.

c) (2 Punkte) Berechnen Sie für die Eigenwerte von $\hat{L}_x$ mit $\mu = 0, \pm 1$ die dazugehörigen normierten Eigenzustände $\psi_{1,\mu}(r)$.

d) (1 Punkt) Einer der möglichen Eigenwerte ist $\mu = 0$. Geben Sie den Erwartungswert von $\hat{L}_z$ sowie die möglichen individuellen Messwerte von $\hat{L}_z$ in diesem Zustand an.

Aufgabe 22: Unschärferelation für $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$

Verifizieren Sie die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta O_1 \Delta O_2 \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{O}_1, \hat{O}_2]\rangle|$$

explizit für $\hat{O}_1 = \hat{L}_x$, $\hat{O}_2 = \hat{L}_y$ und für die allgemeine Eigenfunktion von $\hat{\boldsymbol{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit Quantenzahlen l und m. Drücken Sie dazu $\hat{L}_{x/y}$ durch Leiteroperatoren aus und benutzen Sie die aus der Vorlesung bekannte Wirkung auf Drehimpulseigenzustände. Für welche m gilt bei gegebenem l Gleichheit in der Unschärferelation?

Aufgabe 23: Kugelflächenfunktionen

a) Zeigen Sie die folgende Eigenschaft der Kugelflächenfunktionen

$$Y_{l,-m}(\vartheta, \varphi) = (-1)^m Y^*_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Vollständigkeit

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} Y^*_{l,m}(\vartheta', \varphi') Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta(\varphi - \varphi')\delta(\cos\vartheta - \cos\vartheta')$$

und der Orthonormalität der Kugelflächenfunktionen

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta Y^*_{l',m'}(\vartheta, \varphi) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = \delta_{l,l'}\delta_{m,m'},$$

dass sich jede Funktion f nach Kugelflächenfunktionen entwickeln lässt, d.h.

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} R_{l,m}(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi).$$

c) Zeigen Sie explizit, dass die folgenden Kugelflächenfunktionen als Eigenfunktionen von L^2 und L_z alle zueinander orthonormal sind:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\vartheta, Y_{1\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{\pm i\varphi} \sin\vartheta.$$

d) Verwenden Sie zum Lösen der folgenden Aufgaben das Computer-Algebra-System MATHEMATICA™z. B. im PC-Pool der Physik.

i) Zeigen Sie die Normierung der in a) angegebenen Kugelflächenfunktionen, indem Sie die entsprechenden Integrale berechnen lassen.

ii) Stellen sie das Betragsquadrat der Kugelflächenfunktionen für $l = 0, 1, 2$ und alle möglichen m graphisch dar.

Hinweis: Verwenden Sie die Funktion SphericalPlot3D. In MATHEMATICA sind die Kugelflächenfunktionen verfügbar als SphericalHarmonicY[l, m, θ, ϕ].

iii) Stellen Sie auch das Betragsquadrat der folgenden Kombinationen von Kugelflächenfunktionen dar und vergleichen Sie mit ii)

$$Y_{11} + Y_{1-1}, Y_{11} - Y_{1-1},$$

$$Y_{21} + Y_{2-1}, Y_{21} - Y_{2-1}, Y_{22} + Y_{2-2}, Y_{22} - Y_{2-2}.$$