



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**  
**Sommersemester 2024 - Übungsblatt 9**

Ausgabe: 12.06.2024, Abgabe: 19.06.2024, Übungen: 21.06.2024

**Aufgabe 24: Drehoperator**

**(mündlich)**

Mit einer Drehung  $R \in \text{SO}(3)$  wurde in der Vorlesung der Drehoperator eingeführt durch

$$U_R \psi(\mathbf{r}) := \psi(R^{-1} \mathbf{r}).$$

Zeigen Sie, dass für diesen Operator gilt:

$$U_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}, \quad U_{R'} U_R = U_{R'R}, \quad U_{R^{-1}} = U_R^{-1}, \quad U_R^\dagger U_R = U_R U_R^\dagger = \mathbb{1}.$$

**Aufgabe 25: Das Wasserstoffatom**

**(mündlich)**

Die Schrödingergleichung für ein Elektron im Coulombpotential beschreibt das nichtrelativistische Wasserstoffatom und lautet

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi(\mathbf{r}) = E \Psi(\mathbf{r}).$$

a) Berechnen Sie den Laplace-Operator  $\Delta = \nabla^2$  in Kugelkoordinaten und zeigen Sie, dass er sich mit dem Drehimpulsoperator  $L$  schreiben lässt als

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) - \frac{L^2/\hbar^2}{r^2}.$$

b) Mit einem Produktansatz  $\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R(r) Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$  und der bekannten Eigenwertgleichung  $L^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) \hbar^2 Y_{l,m}(\vartheta, \varphi)$  leiten Sie eine Differenzialgleichung für den radialen Anteil  $R(r)$  her.

c) Führen Sie die Substitution  $R(r) = u(r)/r$  durch, um auf die Gleichung

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2}{a_B r} \right) u(r) = -\frac{2m}{\hbar^2} E_{n,l} u(r)$$

zu kommen, wobei  $a_B = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$  der Bohrsche Radius ist.

## Aufgabe 26: Lösung der Radialgleichung

(schriftlich - 6 Punkte)

Die Radialgleichung für ein Elektron (Masse  $m$ ) im Coulomb-Potential eines  $Z$ -fach geladenen Atomkerns ( $Z = 1$  für Wasserstoff) lautet

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2Z}{a_B r} + \frac{2mE}{\hbar^2} \right) u(r) = 0.$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung soll mit Hilfe der Polynommethode (vgl. Harmonischer Oszillator) gefunden werden.

- a) (2 Punkte) Führen Sie die dimensionslosen Größen  $\eta = \frac{1}{Z} \sqrt{-\frac{E}{E_R}}$  (mit der Rydberg-Energie  $E_R = \frac{\hbar^2}{2ma_B^2}$ ) und  $\rho = \frac{Zr}{a_B}$  ein und vereinfachen Sie die Differenzialgleichung. Zeigen Sie, dass mit dem Ansatz  $u(\rho) = P(\rho)\rho^{l+1}e^{-\eta\rho}$  (Verhalten für  $\rho \rightarrow 0$  und  $\rho \rightarrow \infty$ ) folgt:

$$P''(\rho) + 2 \left( \frac{l+1}{\rho} - \eta \right) P'(\rho) + \frac{2}{\rho} (1 - \eta(l+1)) P(\rho) = 0.$$

- b) (2 Punkte) Machen Sie einen Potenzreihenansatz  $P(\rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \rho^{\nu}$  um eine Rekursionsformel für die  $a_{\nu}$  zu bekommen und diskutieren Sie, warum die Potenzreihe abbrechen muss und was daraus folgt.
- c) (2 Punkte) Die Rekursionsformel

$$a_{\nu+1} = 2 \frac{\eta(l+\nu+1) - 1}{(\nu+1)(\nu+2(l+1))} a_{\nu}$$

wird durch

$$a_{\nu} = \left( \frac{2}{n} \right)^{\nu} \binom{n+l}{n-l-1-\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!}$$

gelöst. Hierbei ist  $n = 1/\eta$  die Hauptquantenzahl.

Damit ergibt sich

$$P(\rho) = L_{n-l-1}^{2l+1} \left( \frac{2\rho}{n} \right) = \sum_{\nu=0}^{n-l-1} \binom{n+l}{n-l-1-\nu} \frac{(-1)^{\nu}}{\nu!} \left( \frac{2\rho}{n} \right)^{\nu}$$

zu den sog. *zugeordneten Laguerre-Polynomen*.

Schreiben Sie damit die Energie-Eigenwerte und (unnormierten) Gesamt-Wellenfunktionen des Elektrons für dieses Problem (in SI Einheiten).