UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Wolf-Rüdiger Hannes
http://tinyurl.com/2024ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 10
Ausgabe: 19.06.2024, Abgabe: 26.06.2024, Übungen: 28.06.2024

Aufgabe 26: Der Vektorraum L^2 (mündlich)

a) Zeigen Sie, dass die quadratintegrierbaren Funktionen ($\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \mathrm{d}\boldsymbol{r} < \infty$) einen Vektorraum (genannt $L^2(\mathbb{R}^3)$) bilden.

b) Zeigen Sie, dass das Skalarprodukt, definiert durch

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int \psi^*(\boldsymbol{r})\phi(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},$$

für alle Elemente von $L^2(\mathbb{R}^3)$ existiert.

Hinweis: Zeigen und verwenden Sie $|\phi(\boldsymbol{r})|^2 + |\psi(\boldsymbol{r})|^2 \geq 2|\phi(\boldsymbol{r})||\psi(\boldsymbol{r})|$.

Aufgabe 27: Lineare Algebra (schriftlich - 8 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie für zwei beliebige Vektoren ϕ und ψ eines Hilbertraumes die

  a) Schwarzsche Ungleichung : $|\langle\phi|\psi\rangle| \leq ||\phi||\,||\psi||$

  b) Dreiecksungleichung : $||\phi+\psi|| \leq ||\phi|| + ||\psi||$

Die Norm $||.||$ ist die Standardnorm, definiert über das Skalarprodukt, d. h. z. B. $||\phi|| = \sqrt{\langle\phi|\phi\rangle}$.

b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte eines hermiteschen Operators reell und die Eigenvektoren orthogonal sind.

c) (2 Punkte) Bei gegebener Orthonormalbasis $|\psi_n\rangle$ (mit $n = 1, .., N$, N-Dimension des Hilbert-Raumes) lässt sich ein linearer Operator A als Matrix darstellen, durch

$$(A_{ij}) = \langle\psi_i|A|\psi_j\rangle.$$

Zeigen Sie, dass die Spur (=Summe der Diagonalelemente) der Matrixdarstellung von linearen Operatoren (in einem Hilbert-Raum mit abzählbarer Orthonormalbasis) unabhängig von der gewählten Basis ist.

d) (2 Punkte) In Analogie zu den *Poisson-Klammern* in der Mechanik wird in der Quantenmechanik der Kommutator $[A, B] := AB - BA$ zwischen zwei linearen Operatoren eingeführt.

Wenn A und B hermitesch sind, wann ist das Produkt AB auch hermitesch? Folgt aus $[A, B] = 0$ und $[B, C] = 0$ auch $[A, C] = 0$?

Aufgabe 28: Gram-Schmidt-Orthonormierung (mündlich)

Betrachten Sie den Hilbert-Raum $L^2([-1, 1], \mathbb{R})$ mit dem Skalarprodukt $\langle f|g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

a) Konstruieren Sie durch Anwendung des *Gram-Schmidt-Verfahrens* ausgehend von der Basis der Monome $(1, x, x^2, x^3, ...)$ die ersten drei Polynome eines Orthogonalsystems.

Hinweis: Die orthogonalen Polynome $p_n(x)$ mit $n = 0, 1, 2, ..$ ergeben sich im Gram-Schmidt-Verfahren rekursiv aus den gegebenen Polynomen $f_n(x)$ durch

$$p_n(x) = f_n(x) - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\langle p_i|f_n\rangle}{\langle p_i|p_i\rangle} p_i(x).$$

b) Gesucht ist ein Orthogonalsystem von Polynomen $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ mit der Normierung

$$\langle P_n|P_m\rangle = \int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2n+1}\delta_{nm}.$$

Normieren Sie die Polynome aus a) um die $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) zu erhalten. Die so bestimmten Polynome werden *Legendre-Polynome* genannt. Vergleichen Sie zur Kontrolle mit den in der Vorlesung verwendeten Legendre-Polynomen.

c) Bestimmen Sie zum Vergleich ausgehend von allgemeinen Polynomen der n-ten Ordnung, d.h. $f_0(x) = a_0$, $f_1(x) = a_1x + b_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$, die Polynome $P_n(x)$ (für $n = 0, 1, 2$) allein durch Ausnutzung der Orthonormalitätsbedingungen.