



**Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)**

**Sommersemester 2024 - Übungsblatt 11**

Ausgabe: 26.06.2024, Abgabe: 03.07.2024, Übungen: 05.07.2024

**Aufgabe 31: Vektoren und Darstellungen**

**(mündlich)**

Durch  $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$  sei in einem zweidimensionalen Raum eine orthonormierte Basis gegeben (Basis der  $\{a\}$  Darstellung). Zwei Zustandsvektoren  $|b_1\rangle, |b_2\rangle$  seien durch

$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle + i|a_2\rangle), \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|a_1\rangle - i|a_2\rangle)$$

gegeben.

- Zeigen Sie, dass die Vektoren  $|b_1\rangle, |b_2\rangle$  ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden.
- Geben Sie die  $\{a\}$ -Darstellung der Ketvektoren  $|a_1\rangle, |a_2\rangle, |b_1\rangle, |b_2\rangle$  an.
- Geben Sie die Transformationmatrix  $U$  von der  $\{a\}$ - in die  $\{b\}$ -Darstellung an und verifizieren Sie, dass  $U$  unitär ist.
- Geben Sie die  $\{b\}$ -Darstellung der Ketvektoren  $|a_1\rangle, |a_2\rangle$  an.

**Aufgabe 32: Der Harmonische Oszillator I**

**(schriftlich - 8 Punkte)**

Mit der für den harmonischen Oszillator aus der Vorlesung bekannten orthonormierten Basis der Eigenzustände  $|n\rangle$ , mit  $n = 0, 1, 2, \dots$ , des Hamiltonoperators  $H = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2})$  zu den Eigenwerten  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ , sollen die folgenden Größen berechnet werden:

- (2 Punkte) Berechnen Sie die Matrizen  $\langle n'|\hat{x}|n\rangle$  und  $\langle n'|\hat{p}|n\rangle$  mit den Orts- und Impuls-Operatoren  $\hat{x}$  und  $\hat{p}$ .
- (3 Punkte) Berechnen Sie  $\langle n'|\hat{x}^2|n\rangle$  und  $\langle n'|\hat{p}^2|n\rangle$  und zeigen Sie, dass die Matrixdarstellung von  $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2$  diagonal ist.
- (3 Punkte) Lösen Sie mit Teilaufgabe b) folgenden Widerspruch:
  - Zeigen Sie für 2 beliebige endlich dimensionale Matrizen A und B, dass  $\text{Spur}([A, B]) = 0$  gilt, wobei  $\text{Spur}(A) = \sum_i A_{ii}$ .

- b) Aus der Spurbildung angewendet auf den Orts-Impuls-Kommutator  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  in Matrixdarstellung müsste nach Punkt (1) also in naiver Betrachtung  $\hbar = 0$  folgen. Berechnen Sie  $\hat{x}\hat{p}$  und  $\hat{p}\hat{x}$  mit den unendlich-dimensionalen Matrizen aus a) um zu erklären, weswegen die Folgerung  $\hbar = 0$  nicht gilt.

### Aufgabe 33: Der Harmonische Oszillator II

(mündlich)

Betrachten Sie die sogenannten *kohärenten Zustände*

$$|\psi_\alpha\rangle = C \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = C e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle,$$

die mit einer komplexen Konstante  $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$  gebildet werden können.

Kohärente Zustände beschreiben das Analogon zu einem klassischen Teilchen im harmonischen Oszillator und haben vielseitige Anwendungen in der Laserphysik und Quantenoptik.

- a) Zeigen Sie, dass  $|\psi_\alpha\rangle$  Eigenfunktion zum Absteigeoperator  $a$  ist. Vermuten Sie, dass  $a^\dagger$  Eigenfunktionen besitzt?

- b) Welches  $C \in \mathbb{R}$  normiert  $|\psi_\alpha\rangle$  auf 1? Mit diesem  $C$  kann  $|\psi_\alpha\rangle$  geschrieben werden als  $|\psi_\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$ . Welche bekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung ergibt  $p_n = |c_n|^2$ ? Drücken Sie diese durch die mittlere Teilchenzahl  $\langle \hat{n} \rangle = \langle \psi_\alpha | a^\dagger a | \psi_\alpha \rangle$  aus. Berechnen Sie auch die Varianz  $(\Delta n)^2$  der Teilchenzahl.

- c) Wie lautet der zeitabhängige Zustand  $|\psi_\alpha(t)\rangle$ , wenn  $|\psi_\alpha(t=0)\rangle = |\psi_\alpha\rangle$ ?

*Hinweis:* Argumentieren Sie mit der zeitabhängigen Schrödingergleichung und bringen Sie  $|\psi_\alpha(t)\rangle$  auf die Form  $|\psi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} |\psi_{\alpha(t)}\rangle$ .

- d) Berechnen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert für den Ort

$$\langle x \rangle(t) = \langle \psi_\alpha(t) | x | \psi_\alpha(t) \rangle.$$

*Hinweis:* Bringen Sie das Ergebnis auf die Form  $\langle x \rangle(t) = 2\lambda|\alpha| \cos(\omega t - \delta)$ .

- e) Berechnen Sie die Unschärfe  $(\Delta x)^2(t) = \langle \psi_\alpha(t) | (x - \langle x \rangle(t))^2 | \psi_\alpha(t) \rangle$  und (das analog definierte)  $(\Delta p)^2(t)$  unter Ausnutzung von  $\langle p \rangle = m \frac{d}{dt} \langle x \rangle$  (Ehrenfest-Theorem).

Zeigen Sie damit, dass  $|\psi_\alpha\rangle$  ein sogenanntes Minimalpaket ist, welches zeitlich nicht auseinander läuft, d.h.

$$\Delta x(t) \Delta p(t) = \frac{\hbar}{2}.$$