UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Wolf-Rüdiger Hannes
http://tinyurl.com/2024ik4

Physik IV: Integrierter Kurs (Theoretische Physik)
Sommersemester 2024 - Übungsblatt 13
Ausgabe: 10.07.2024, Abgabe: 17.07.2024, Übungen: 19.07.2024

Aufgabe 37: Harmonischer Oszillator mit Störung (10 Punkte)

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2$$

mit der kubischen Störung

$$H_1 = \alpha x^3.$$

a) (2 Punkte) Berechnen Sie x^3 mit der Operatorenmethode des harmonisches Oszillators und damit das Matrixelement $\langle m|H_1|n\rangle$.

b) (2 Punkte) Bestimmen Sie mit Hilfe der zeitunabhängigen Störungstheorie die Energiekorrektur in erster und zweiter Ordnung (für $n \geq 3$).

c) (1 Punkt) Geben Sie damit auch die Wellenfunktion in erster Ordnung Störungstheorie an.

d) (2 Punkte) Bestimmen Sie die Konstante α des kubischen Potentialterms für das in der Molekülphysik verwendete *Morsepotential*

$$V(x) = V_0\left(1 - e^{-a(x-x_0)}\right)^2$$

durch Taylorentwicklung um den um x_0 verschobenen Nullpunkt.

e) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass die Energiedifferenz benachbarter Energieniveaus (in 2. Ordnung Störungstheorie) mit steigendem n abnimmt.

f) (2 Punkte) Skizzieren Sie das Morsepotential und die Energieniveaus der gebundenen Zustände.

Aufgabe 38: Zwei-Niveausystem (Spin-Polarisation) **(mündlich)**

a) Zeigen Sie, dass für einen beliebigen normierten Zustand $|\psi\rangle$ im zwei-dimensionalen Hilbertraum $\mathbb{C}^2$ (mit Standard-Skalarprodukt) gilt

$$\langle\psi|\boldsymbol{\sigma}|\psi\rangle = \boldsymbol{n}$$

mit $\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)$ einem normierten Richtungsvektor ($|\boldsymbol{n}| = 1$). $\boldsymbol{\sigma}$ ist der Vektor gebildet mit den Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gibt also zu jedem $|\psi\rangle$ eine Richtung $\boldsymbol{n}$, so dass der Erwartungswert des Vektors $\boldsymbol{\sigma}$ in Richtung $\boldsymbol{n}$ zeigt.

b) Bei einer Messung an diesem Zustand wird die Wahrscheinlichkeit p bestimmt, den Eigenwert $+1$ von σ_z zu finden. Zeigen Sie, dass $p = \frac{1}{2}(1 + n_z)$ gilt. Wie lautet die Wahrscheinlichkeit, den Eigenwert $+1$ von σ_x zu messen?

Aufgabe 39: Zeitentwicklung eines Zustands im Quantentopf **(mündlich)**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich im eindimensionalen Potentialtopf

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq L \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ lautet die Wellenfunktion des Teilchens

$$\psi(x, t = 0) = \sqrt{\frac{8}{5L}} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

a) Geben Sie zunächst die Energie-Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ an und berechnen Sie die Energie-Eigenwerte E_n.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Eigenzustand $\phi_n(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ zu finden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Grundzustand zu finden?

c) Berechnen Sie die Wellenfunktion $\psi(x, t)$ für die Zeit $t > 0$.

d) Berechnen Sie den Energiemittelwert für das Teilchen im Zustand $\psi(x, t)$. Ändert sich der Energiemittelwert mit der Zeit?

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zum Zeitpunkt t in der linken Hälfte des Quantentopfes ($0 \leq x \leq L/2$) zu finden. Diskutieren Sie die Zeitentwicklung der Wahrscheinlichkeit.