UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
https://tinyurl.com/QC-2023

Quantencomputing und Quantensimulation
Wintersemester 2023/24 - Übungsblatt 2
Ausgabe: 3.11.2023, Abgabe: 10.11.2023, Übungen: 13.11.2023

Aufgabe 4: Die Blochkugel (8 Punkte)

Mithilfe einer Blochkugel kann die Wellenfunktion eines Zweizustandsystems durch den Blochvektor $\boldsymbol{p}$ wie folgt dargestellt werden:

$$|\theta, \varphi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

a) (2 Punkte) Skizzieren sie die Blochkugel und markieren Sie die Eigenzustände der drei Paulimatrizen.

b) (2 Punkte) Berechnen Sie für einen beliebigen Vektor $\boldsymbol{n}$ den Erwartungswert $\langle\theta, \varphi|\, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\, |\theta, \varphi\rangle$ und drücken Sie diesen durch den Blochvektor $\boldsymbol{p}$ aus.

Im folgenden soll gezeigt werden, dass

$$R_{\boldsymbol{n}}(\alpha) = \exp\left(-i\alpha\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}/2\right)$$

mit $\boldsymbol{n}^2 = 1$ eine Ein-Qubit-Rotation mit Winkel α um die Rotationsachse $\boldsymbol{n}$ beschreibt.
c) (2 Punkte) Leiten Sie zunächst folgende Beziehung her:

$$R_{\boldsymbol{n}}(\alpha) = \cos\left(\alpha/2\right)\mathbb{1} - i\sin\left(\alpha/2\right)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}).$$

d) (2 Punkte) Berechnen Sie $R_{\boldsymbol{n}}(\alpha)\,|\theta, \varphi\rangle$ für den Fall $\boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{e}}_z$.

Aufgabe 5: Zeitabhängige Störungstheorie (mündlich)

Gegeben sei die Schrödinger-Gleichung in integraler Form für einen zeitabhängigen Hamiltonoperator

$$|\psi(t)\rangle = |\psi_0\rangle - \frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t'\,\hat{H}(t')\,|\psi(t')\rangle \tag{1}$$

mit Anfangsbedingung $|\psi(t=0)\rangle = |\psi_0\rangle$. Um eine erste Näherung für $|\psi(t)\rangle$ zu erhalten, kann im Integral auf der rechten Seite von Gleichung (1) $|\psi(t')\rangle$ durch die ursprüngliche Wellenfunktion $|\psi_0\rangle$ ersetzt werden. Durch wiederholtes einsetzen der so erhaltenen neuen Wellenfunktion kann Gleichung (1) störungstheoretisch bestimmt werden.
a) Leiten Sie Gleichung (1) ausgehend von der Schrödinger-Gleichung her.

b) Berechnen Sie die ersten beiden Korrekturterme der beschriebenen Störungstheorie.

c) Beschreiben Sie den Unterschied zu folgender (unter Umständen falscher) exakten Lösung

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^t \mathrm{d}t' \hat{H}(t')\right)|\psi_0\rangle\,. \tag{2}$$

Unter welchen Voraussetzungen stellt Gleichung (2) eine korrekte Lösung dar?

d) Gegeben sei ein zeitabhängiger Hamiltonoperator der Form

$$\hat{H}(t) = \hat{H}_0 + \mathrm{rect}\left(\frac{t-t_0}{\Delta t}\right)\hat{V}, \tag{3}$$

wobei

$$\mathrm{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } |t| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Berechnen Sie $|\psi(t)\rangle$ für $t > t_0 + \Delta t/2$.
Hinweis: Beschreiben Sie die Lösung mithilfe eines Zeitentwicklungsoperators $\hat{U}(t)$, $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)\,|\psi_0\rangle$. *Teilen Sie dazu die Entwicklung in Teilabschnitte mit konstantem* $\hat{H}$ *auf und verwenden Sie die allgemeine Eigenschaft* $\hat{U}(t,t_0) = \hat{U}(t,t')\hat{U}(t',t_0)$ *für beliebige* $t > t' > t_0$.

Aufgabe 6: Klassische Speicherung eines Quantenzustandes (mündlich)

Google's Quantenprozessor 'Sycamore' besteht aus 53 Qubits. Berechnen Sie den klassischen Speicher der benötigt wird um die vollständige Wellenfunktion aller Qubits zu speichern.
Hinweis: Gewöhnlicherweise werden 32 Bits verwendet um eine einzelne Gleitkommazahl zu speichern. Wie viele Gleitkommazahlen werden benötigt um die Wellenfunktion eines einzelnen Qubits zu charakterisieren?