UNIVERSITÄT KONSTANZ
Fachbereich Physik
Prof. Dr. Guido Burkard
Dr. Regina Finsterhoelzl
https://tinyurl.com/QC-2023

Quantencomputing und Quantensimulation
Wintersemester 2023/24 - Übungsblatt 3
Ausgabe: 10.11.2023, Abgabe: 17.11.2023, Übungen: 20.11.2023

Aufgabe 7: Ein-Qubit Gatter aus Rotationen (5 Punkte)

a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass sich eine Rotation um eine beliebige Achse $\boldsymbol{n}$ durch Rotationen um die x- und z-Achse darstellen lässt,

$$R_{\boldsymbol{n}}(\theta) = R_x(\alpha) R_z(\beta) R_x(\gamma)$$

b) (1 Punkt) Eine Rotation um eine beliebige Achse $\boldsymbol{n}$ lässt sich durch

$$R_{\boldsymbol{n}}(\theta) = A\sigma_x B\sigma_x C$$

mit $ABC = \mathbb{1}$ ausdrücken. Zeigen Sie, dass diese Aussage durch die Wahl

$$A = R_x(\alpha)R_z(\beta/2)R_z(-\pi/2) \qquad B = R_z(-\beta/2)R_y\left(-\frac{\delta+\alpha}{2}\right) \qquad C = R_y\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)R_z(\pi/2)$$

bewiesen wird.
Hinweis: Verwenden Sie $R_x(\alpha) = R_z(-\pi/2)R_y(\alpha)R_z(\pi/2)$.

c) (1 Punkt) Gegeben seien zwei unitäre Transformationen $R_z(\beta)$ und $R_{\pi/3}(\alpha)$, wobei $R_{\pi/3}(\alpha)$ eine Rotation um die Achse $\boldsymbol{n} = 1/2(1, 0, \sqrt{3})^T$ darstellt. Eine Rotation um die x-Achse lässt sich dann durch

$$R_x(\theta) = R_{\pi/3}(\alpha)R_z(\beta)R_{\pi/3}(\alpha)$$

beschreiben, wobei für die Winkel α, β gilt

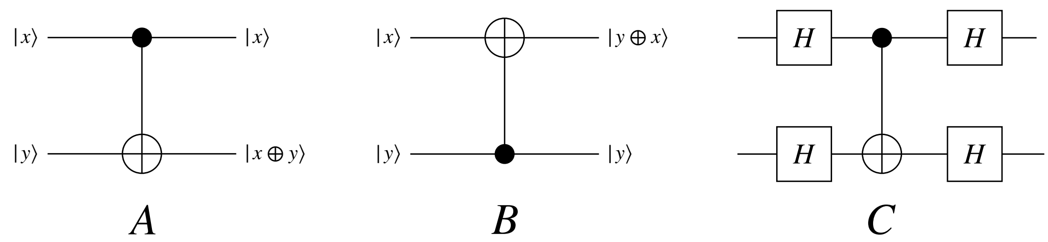
$$\alpha = \arccos\left(\frac{\cos(\theta/2)\sqrt{1-3\sin(\theta/2)^2} - 3\sin(\theta/2)^2/4}{\cos(\theta/2)^2 + \sin(\theta/2)^2/4}\right)$$
$$\beta = -2\arctan\left(\frac{\sin(\alpha)\sqrt{3}/2}{\cos(\alpha/2)^2 - \sin(\alpha/2)^2/2}\right)$$

Berechnen Sie den maximalen Drehwinkel θ, der durch diese Transformation erreicht werden kann.

d) (1 Punkt) Wie kann die Rotation $U = R_x(\pi/2)R_z(\phi)R_x(\pi/2)$ durch die beiden gegebenen Rotationen R_z und $R_{\pi/3}$ dargestellt werden?

Aufgabe 8: CNOT und CZ Gatter (mündlich)

Betrachten Sie die drei dargestellten Quantenschaltkreise A, B und C.

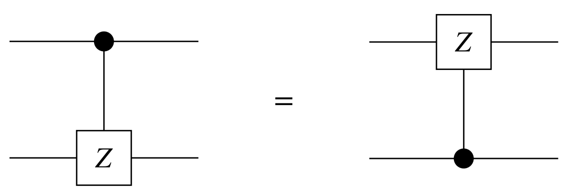


a) Wie lauten die unitären Matrizen, die die beiden Schaltkreise A und B repräsentieren? Geben Sie die Basis an in der Sie die Matrizen darstellen.

b) Zeigen Sie, dass Schaltkreis C identisch zu Schaltkreis B ist.

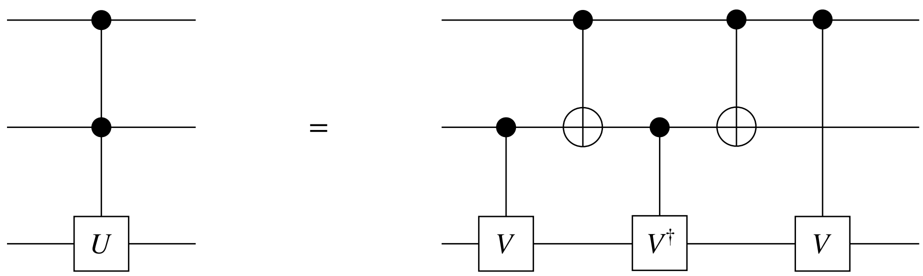
c) Wie wirkt Schaltkreis A, wenn als Rechenbasis die Zustände $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ statt $|0\rangle\,/\,|1\rangle$ verwendet werden?
Hinweis: Die Antwort kann aus der Identität aus Aufgabe b) hergeleitet werden.

d) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Schaltkreise



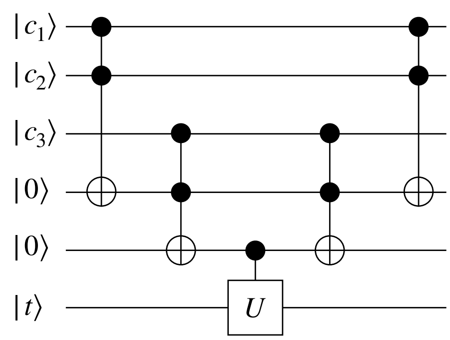
Aufgabe 9: 3- und Mehr-Qubit-Gatter (mündlich)

Betrachten Sie das 3-Qubit-Gatter $C^2(U)$, welches die unitäre Transformation U auf das Ziel-Qubit anwendet, falls sich beide Kontroll-Qubits im 1-Zustand befinden.
a) Beweisen Sie, dass sich dieses 3-Qubit-Gatter mithilfe einer unitären Transformation V, gegeben durch $V^2 = U$, aus mehreren 2-Qubit-Gattern erzeugen lässt. Berechnen Sie dazu die Transformation des Ziel-Qubits für alle vier Kombinationen der Kontroll-Qubits.



b) Durch welches V kann auf diese Weise das Toffoli-Gatter erzeugt werden?

c) Zeigen Sie, dass sich ein Gatter der Form $C^3(U)$ wie folgt aus 2-Qubit-Gattern erstellen lässt:



Wie viele Toffoli-Gatter werden benötigt um ein Gatter der Form $C^n(U)$ zu realisieren?